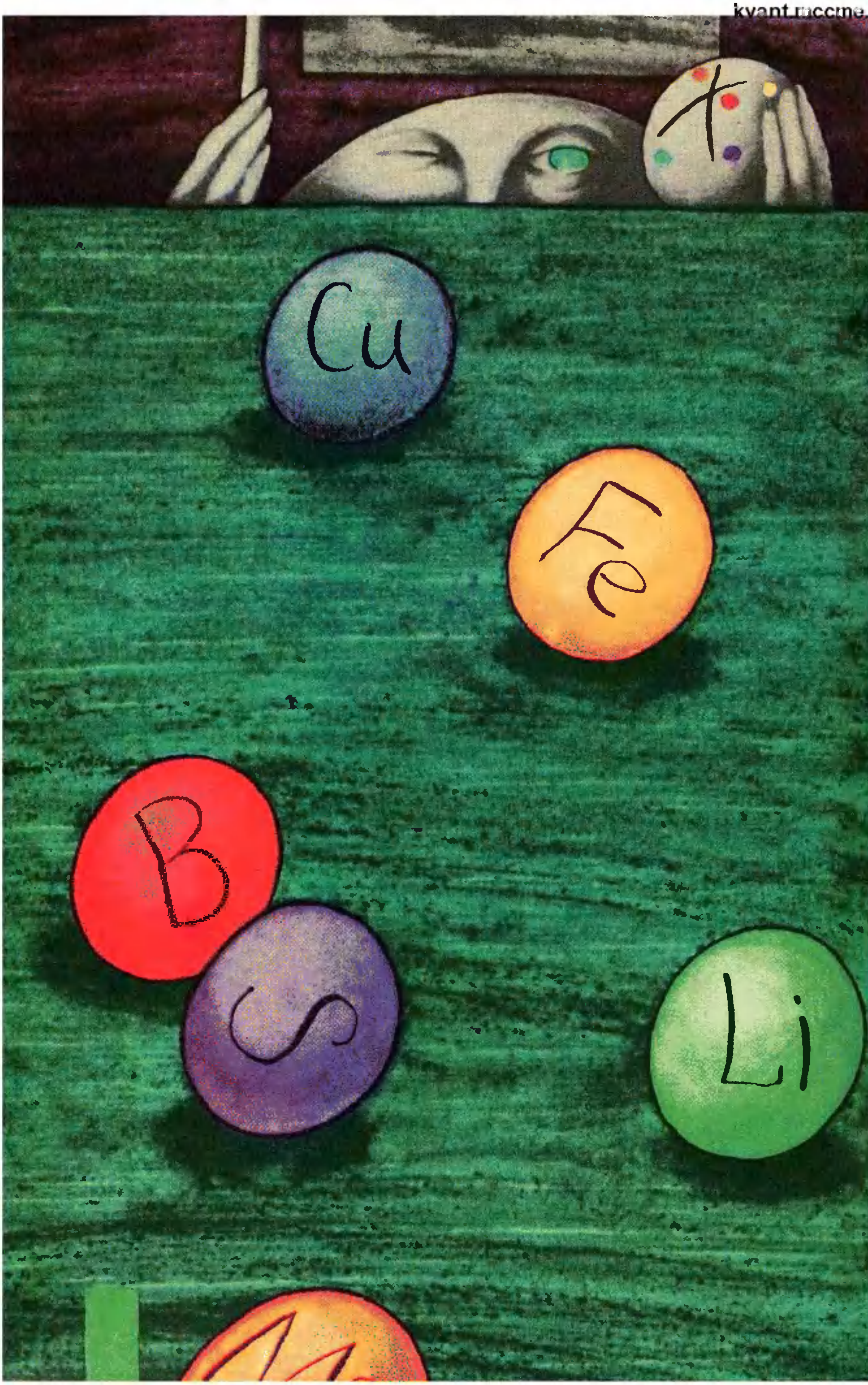
ISSN 0130—2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

87


x
Cu
Fe
B
S
Li

Квант

Основан в 1970 году

1987

1

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

Три столетия разделяют задачу классической механики об упругом столкновении шаров и замечательное открытие XX века — эффект Комптона. Что общего у этих явлений? Как они связаны? Об этом читайте в статье на с. 3.

С Новым годом!

Наступил 1987 год — второй год XII пятилетки, год семидесятилетия Великого Октября. Он будет годом напряженного труда в условиях непрерывно углубляющейся перестройки, ускорения социально-экономического развития нашей страны. Необходимо закрепить успехи, достигнутые после апрельского (1985 года) пленума ЦК КПСС и XXVII съезда партии, и уверенно двигаться вперед по пути интенсификации народного хозяйства. Предстоят революционные преобразования производительных сил и совершенствование производственных отношений, всей социальной жизни общества. Многое придется изменить и в современной системе образования и подготовки кадров. Социализм обладает огромными резервами во всех сферах жизни общества, и эти резервы необходимо ввести в действие как можно быстрее.

Впереди XX съезд ВЛКСМ. Он обсудит проблемы, которые жизнь ставит перед комсомолом и молодежью на этапе коренной перестройки нашей экономики. На повестке дня — расширение прав комсомола (в том числе и многомиллионной армии учащихся), развитие его инициативы, самостоятельности, повышение ответственности перед страной. Это позволит еще активнее привлечь к решению общенародных задач молодежь — самую динамичную, напористую часть общества.

Дорогие наши читатели! Вам предстоит интереснейшая жизнь в условиях непрерывно развивающейся и усложняющейся научно-технической революции. Как сказал Генеральный секретарь ЦК КПСС М. С. Горбачев, нынешняя пятилетка — труднейшая, сложнейшая, но и самая интересная пятилетка. Вдумайтесь в эти слова — ведь в них ваше ближайшее будущее. Оно потребует от вас немалых знаний и умений. Одним из самых главных требований жизни становится умение самостоятельно обучаться. Стране нужны высокообразованные работники, влюбленные в процесс приобретения новых знаний и хорошо владеющие технологией этого процесса. И наш журнал будет стремиться помогать вам в развитии этих важнейших навыков.

Желаем вам успехов в новом году!

О СТОЛКНОВЕНИИ ШАРОВ И «СЕРЬЕЗНОЙ» ФИЗИКЕ

(Сложен ли эффект Комптона?)

Кандидат физико-математических наук
С. Р. ФИЛОНОВИЧ

Когда-то было сказано, что всякая научная идея проходит в своей истории три этапа: в момент появления она кажется безумной, затем становится общепризнанной и, наконец, рассматривается как тривиальная. (От себя добавим, что в конечном счете идея может оказаться и ошибочной.) Если не обращать внимания на резкость формулировки, присущую всякому афоризму, то с таким общим представлением судеб многих физических идей и теорий нельзя не согласиться. Можно привести немало примеров того, как положения и формулировки, из-за которых когда-то яростно «ломались копья», теперь встречаются на страницах школьных учебников. Вероятно, один из самых свежих примеров такого рода — так называемый эффект Комптона, рассмотрение которого предусматривается новой школьной программой по физике. А ведь каких-нибудь шестьдесят лет назад вокруг самого эффекта бушевали страсти, а в адрес его первооткрывателя высказывались резкие, незаслуженные обвинения. Теперь же... Однако прежде чем рассказать о самом эффекте, нам необходимо обсудить вопрос, уже отчасти знакомый многим читателям.

Об одной классической задаче

Задумывались ли вы о том, почему в задачниках по физике так часто встречаются задачи на столкновения шаров? Для этого есть много оснований. Прежде всего, удар, происходящий при столкновении шаров, с позиций механики — один из простейших видов взаимодействий, законы которого можно относительно просто исследовать на опыте. Именно поэтому при формировании классической механики в XVII столетии установление законов удара считалось важнейшей задачей. В то время наибольших успехов в исследовании этой задачи добился знаменитый голландский физик и математик Х. Гюйгенс, написавший сочинение «О движении тел под влиянием удара», в котором были рассмотрены многие случаи столкновения шаров.

Значение задач об ударе состоит и в том, что в них в наиболее простой и отчетливой форме можно проследить действие законов сохранения энергии и импульса. Этими законами мы и воспользуемся при решении очень простой задачи: шар массой m_1 налетает на неподвижный шар массой m_2 со скоростью v_1. Найти относительное изменение кинетической энергии первого шара после столкновения, если известно, что удар абсолютно упругий и вращением шаров можно пренебречь.

Поскольку в условии задачи не оговорено, что удар центральный, мы должны предположить, что после

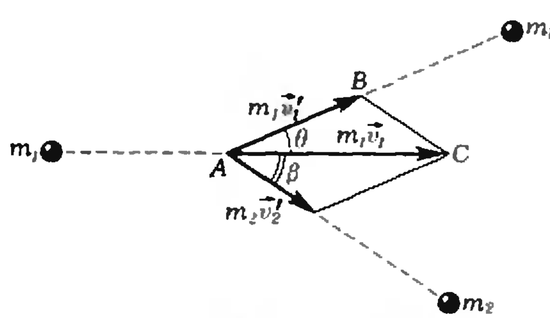


Рис. 1. Диаграмма импульсов для столкновения шаров.

Х. Гюйгенс (1629—1695).

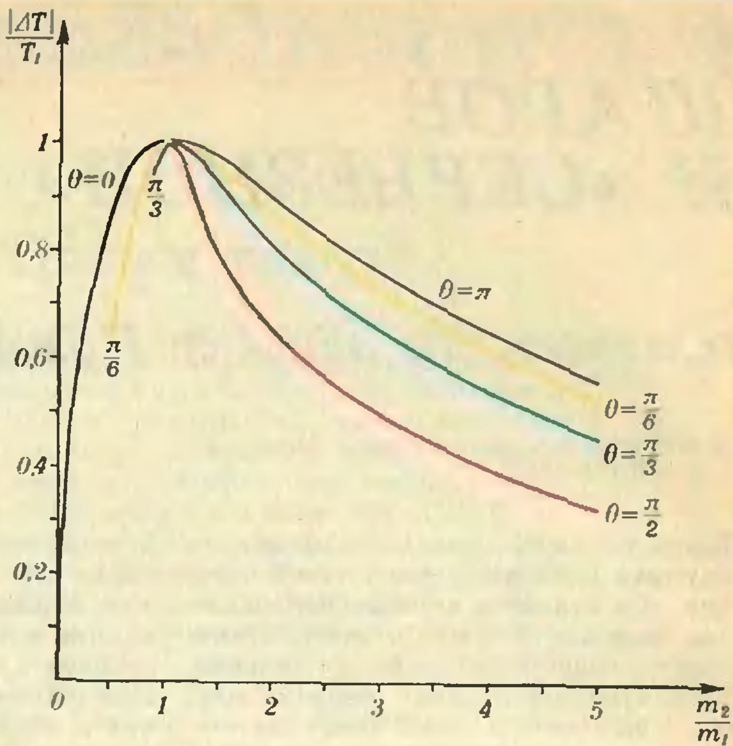


Рис. 2. Зависимость относительного изменения кинетической энергии налетающего шара от отношения масс сталкивающихся шаров для различных углов рассеяния.

удара шары разлетаются под некоторыми углами θ и β к направлению первоначального движения шара m_1. На рисунке 1 треугольник ABC образован векторами импульсов $\vec{p}_1=m_1\vec{v}_1$, $\vec{p}_1'=m_1\vec{v}_1'$ и $\vec{p}_2'=m_2\vec{v}_2'$ $(p_2=0)$ — таково геометрическое представление закона сохранения импульса в нашей задаче. Применяя теорему косинусов к треугольнику ABC, получаем:

$$(m_1v_1)^2=(m_2v_2')^2-(m_1v_1')^2+2m_1^2v_1v_1'\cos\theta. \quad (1)$$

Закон сохранения энергии в данном случае, очевидно, можно записать в виде

$$\frac{m_1v_1^2}{2}=\frac{m_1(v_1')^2}{2}+\frac{m_2(v_2')^2}{2}. \quad (2)$$

В систему двух уравнений (1)—(2) входят три неизвестные величины: v_1', v_2' и θ, поэтому выразить их независимо друг от друга нельзя. Однако если задаться конкретным значением угла θ — его называют углом рассеяния, — то путем несложных преобразований можно выразить скорость v_1' как функцию этого угла:

$$v_1'=v_1\frac{m_1\cos\theta-\sqrt{m_2^2-m_1^2\sin^2\theta}}{m_1+m_2}.$$

Отсюда нетрудно найти и относительное изменение кинетической энергии шара m_1:

$$\frac{|\Delta T|}{T_1}=\frac{m_1v_1^2-m_1(v_1')^2}{m_1v_1^2}=$$
$$=\frac{2}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^2}\left(\frac{m_2}{m_1}+\sin^2\theta+\cos\theta\sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2-\sin^2\theta}\right). \quad (3)$$

Проанализируем полученное решение для простейшего случая лобового столкновения шаров ($\theta=0$ или $\theta=\pi$). При $m_1\ll m_2$ $\Delta T\to 0$; это означает, что шар m_1 отскакивает от шара m_2 в направлении, противоположном первоначальному ($\theta=\pi$), со скоростью, по абсолютной величине равной v_1. При $m_1\gg m_2$ также $\Delta T\to 0$; в данном случае столкновение с шаром m_2 практически не влияет на движение шара m_1 ($\theta=0$). Во всех промежуточных случаях $\Delta T\neq 0$. Следовательно, при некотором значении отношения m_2/m_1 величина ΔT достигает максимума. Простой расчет показывает, что максимум ΔT соответствует условию $m_2/m_1=1$.

На рисунке 2 приведены кривые зависимости относительного изменения кинетической энергии первого шара от величины m_2/m_1 для нескольких углов рассеяния. Видно, что для различных θ кривые несколько различаются, но у всех у них есть общая черта — они имеют максимум при $m_2/m_1=1$. Отметим, что рассеяние на угол, отличающийся от 0 или π, возможно лишь при $m_2/m_1>|\sin\theta|$ (см. (3)), поэтому соответствующие кривые резко обрываются; в частности, рассеяние на угол $\theta=\pi/2$ происходит только при $m_1<m_2$.

Рассмотренная задача, хотя и полезна, все-таки представляет собой не более чем упражнение из школьного задачника. И все же о ней пришлось вспомнить молодому американскому физику Артуру Комптону в начале 20-х годов нашего столетия, когда он занимался исследованиями, весьма далекими от классической механики.

Открытие эффекта

Конец XIX и первые годы XX века ознаменовались серией открытий, последствия которых нельзя было предвидеть; более того, и сейчас, много десятилетий спустя, практически невозможно перечислить все следствия открытия рентгеновских лучей и электрона, выдвижения идеи о кванте энергии. Знаменательно, однако, что все три перечисленные открытия теснейшим образом переплелись в истории обнаружения принципиально нового эффекта, названного впоследствии эффектом Комптона.

Рентгеновские лучи сразу привлекли к себе большое внимание, прежде всего — возможностью их практического использования в медицине. Однако на протяжении многих лет нерешенным оставался вопрос об их природе. Лишь в 1912 году по инициативе М. Лауэ были проведены опыты, убедительно доказавшие волновую природу рентгеновских лучей. Тогда же стало ясно, что к рентгеновским лучам должна быть применима теория рассеяния электромагнитного излучения, созданная задолго до этого первооткрывателем электрона Дж. Дж. Томсоном. Основные черты этой классической теории рассеяния таковы.

Электроны вещества под действием переменного электрического поля падающей на вещество электромагнитной волны приходят в состояние вынужденных колебаний, которые происходят с частотой волны. Согласно представлениям классической электродинамики всякий движущийся с ускорением заряд — источник волн. Значит, электроны вещества становятся источниками вторичных волн. Направление распространения волн может не совпадать с направлением первичной возбуждающей волны — это и называют рассеянием излучения.

Томсон рассчитал зависимость интенсивности рассеянного излучения от угла рассеяния (то есть от угла между направлением первичной волны и направлением наблюдения), исследовал характер его поляризации и т. д. Однако все эти выводы, хотя и имели большое значение, относились все же к деталям теории. Ее важнейшим положением было равенство частот падающего и рассеянного излучения. И многочисленные наблюдения рассеяния видимого света подтверждали, что это действительно так.

Совершенно естественно, что после выяснения природы рентгеновских лучей ученые решили проверить применимость теории Томсона к этому виду электромагнитного излучения. Одним из физиков, занимавшихся проблемой рассеяния рентгеновских лучей, и был А. Комптон. Начиная с 1917 года, он пытался проверить количественные выводы Томсона. Экспериментальные данные не очень хорошо согласовывались с теорией, но Комптон не придавал этому особого значения до тех пор, пока расхождения касались частных выводов классической теории рассеяния. Но в 1923 году он обнаружил уже нечто совершенно удивительное: из опытов следовало, что рассеянное излучение имеет длину волны, отличную от длины волны первичных лучей! Комптон понимал, что любому грамотному физику его результаты должны показаться совершенно «еретическими», и если они обусловлены погрешностями эксперимента, то их поспешная публикация может погубить его репутацию. Поэтому молодой исследователь еще и еще раз проверял данные измерений.

Схема экспериментальной установки Комптона показана на рисунке 3. Результаты, полученные Комптоном в многократно повторенных опытах, сводились к следующему (см. рисунок 4). В рассеянном излучении присутствует не только компонента с длиной волны падающего излучения λ, но и компонента с длиной волны $\lambda'>\lambda$. Разность длин волн $\Delta\lambda=\lambda'-\lambda$ (так называемое «комптоновское сме-

Рис. 3. Схема установки А. Комптона.
Пучок рентгеновских лучей, выходивший из трубки T, рассеивался на объекте R. Чтобы выделить из рассеянного излучения часть, рассеянную под заданным углом θ, использовалась система щелей (рисунок соответствует θ = 90°). Прошедшее через щели излучение анализировалось специальным спектрометром. Важнейшей частью спектрометра являлся кристалл, образующий для рентгеновского излучения пространственную дифракционную решетку. Вследствие дифракции на этой решетке отраженные от кристалла лучи распространялись по направлениям, зависящим от длины волны отраженного излучения. Для анализа пространственного распределения лучей применялась ионизационная камера. Попадая в нее, кванты рентгеновского излучения вызывали ионизацию газа, заполнявшего камеру. В результате возрастал ток, протекавший через газ. Меняя ориентацию камеры относительно кристалла и следя за током, можно определить относительную интенсивность рентгеновских лучей разных длин волн, присутствовавших в рассеянном излучении.

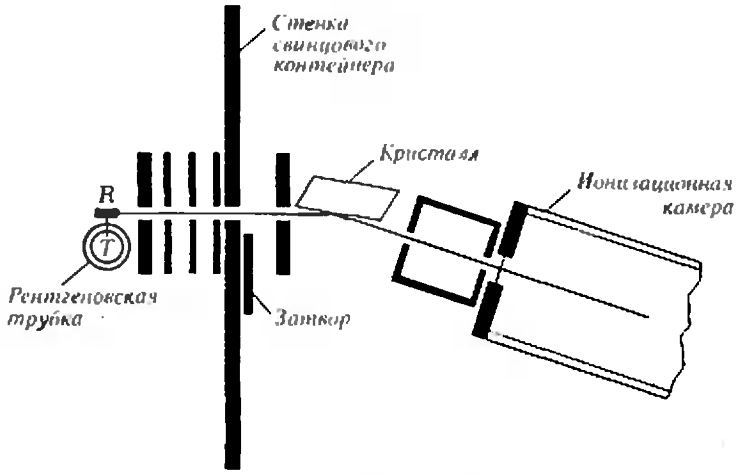
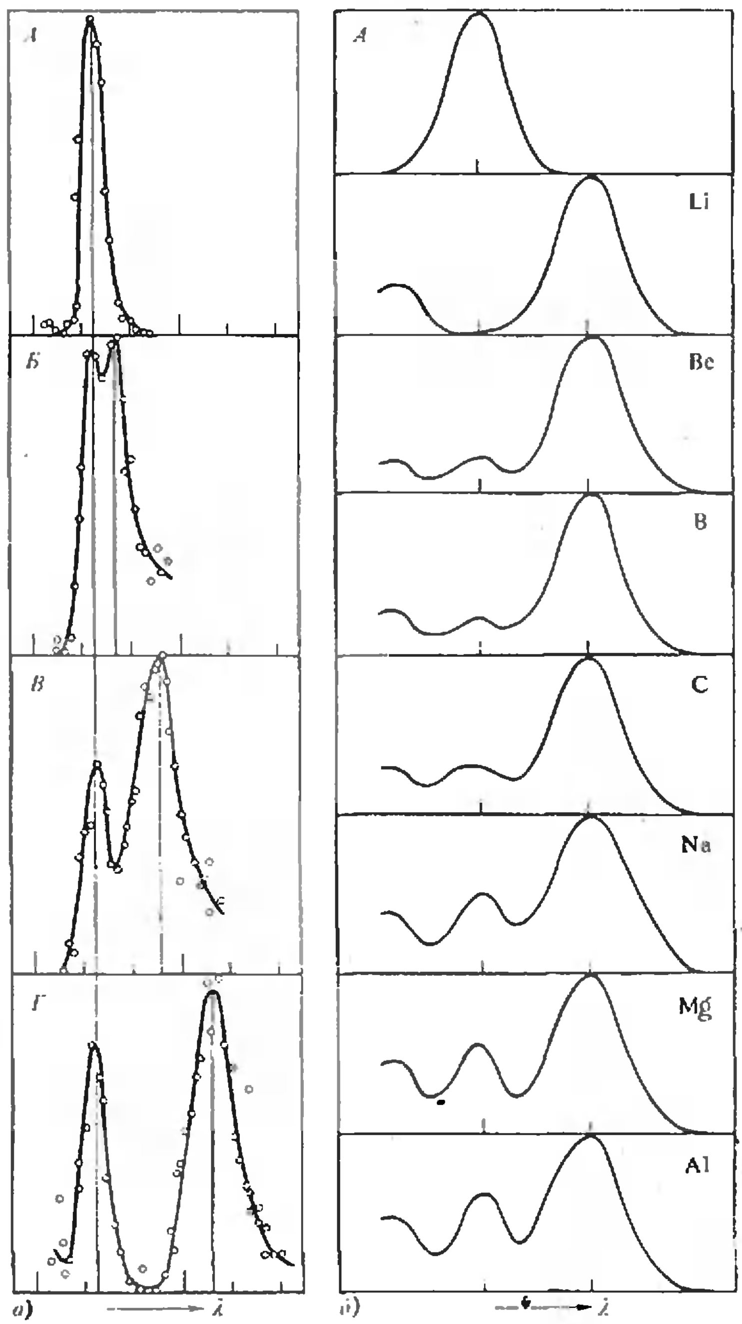


Рис. 4. Результаты экспериментов А. Комптона.
а) — зависимость комптоновского смещения от угла рассеяния θ: А — спектр падающего излучения; Б, В, Г — спектры рассеянного излучения при θ = 45°, 90° и 135°, соответственно.
Смещение увеличивается с ростом угла рассеяния.
б) — результаты исследования эффекта для различных рассеивателей; А — спектр падающего излучения.
Чем массивнее атомы элемента-рассеивателя, тем меньше интенсивность смещенной компоненты и больше — несмещенной. Величина смещения остается постоянной.



щение») зависит от угла рассеяния: с ростом θ увеличивается и $\Delta\lambda$ (рисунок 4, *а*). Для данного угла θ величина $\Delta\lambda$ не зависит от природы рассеивателя, то есть при рассеянии на разных веществах $\Delta\lambda$ оказывается одинаковым. При смене рассеивателей меняется соотношение между интенсивностями смещенной (с длиной волны λ') и несмещенной (λ) компонент: с увеличением номера элемента в таблице Менделеева, соответствующего материалу рассеивателя, интенсивность несмещенной компоненты растет, а смещенной — падает (рисунок 4,*б*).

Убедившись в правильности экспериментальных данных, Комптон, несмотря на возражения некоторых коллег, опубликовал свои результаты. Однако мысль о необходимости дать им физическую интерпретацию не покидала ученого. И вскоре Комптон публикует новую работу, в которой дает теорию эффекта. Физик-экспериментатор предлагает теорию, основывающуюся на самых современных для того времени представлениях! Случай в истории физики крайне редкий.

«Рассеяние рентгеновских лучей как частиц»

Так озаглавил Комптон свои воспоминания, в которых рассказывается о событиях, связанных с открытием эффекта, названного его именем. Это заглавие отражает суть предложенного Комптоном объяснения эффекта.

Комптон получил неплохое образование на родине, а затем был направлен на стажировку в Англию, в знаменитую Кавендишскую лабораторию, где познакомился с важнейшими проблемами физики начала XX века. В частности, он знал о теории квантов света Эйнштейна, в основе которой лежало представление о свете как потоке частиц, характеризующихся частотой ν и энергией $h\nu$ ($h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка). Знал он также и о дополнении к этой теории, сделанном самим Эйнштейном, согласно которому квант света обладает не только энергией, но и импульсом $p=h\nu/c$, где c — скорость света. Идея об импульсе фотона была высказана еще в 1916 году, но до начала 20-х годов она не получила экспериментального подтверждения.

Комптон решил использовать квантовые представления об излучении для объяснения обнаруженного им эффекта. Он высказал предложение, что рассеяние рентгеновских квантов происходит на покоящихся свободных электронах твердого тела, причем столкновение кванта с электроном подобно упругому соударению шаров, в результате которого меняются величины энергии и импульса как у кванта, так и у электрона. Фактически диаграмма импульсов (рисунок 5), соответствующая элементарному акту рассеяния, выглядит так же, как и в случае столкновения шаров, поскольку в векторной форме уравнение, отражающее закон сохранения импульсов, также записывается в виде $\vec{p}_1=\vec{p}_1{}'+\vec{p}_2{}'$ $(\vec{p}_2=0)$. Надо только учесть, что импульс кванта до и после рассеяния — соответственно $p_1=h\nu/c$ и $p_1'=h\nu'/c$, а импульс, приобретаемый электроном, — $p_2'=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}v$, где m_0 — масса покоя электрона (ввиду высокой энергии рентгеновских квантов электрон при столкновении может приобрести скорость, сравнимую со скоростью света; поэтому при записи уравнений следует пользоваться релятивистскими формулами). На основе диаграммы можно записать уравнение, отражающее закон сохранения импульса:

$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2=\left(\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2-\left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2+2\left(\frac{h}{c}\right)^2\nu\nu'\cos\theta. \quad (4)$$

Релятивистское уравнение для закона сохранения энергии записывается в таком виде:

$$h\nu+m_0c^2=h\nu'+\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (5)$$

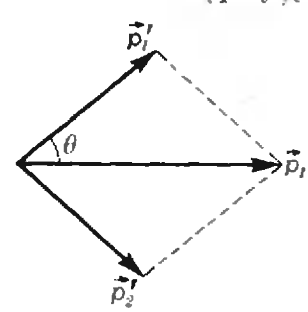


Рис. 5. Диаграмма импульсов для рассеяния фотона на покоящемся электроне.

А. Комптон (1892—1962).

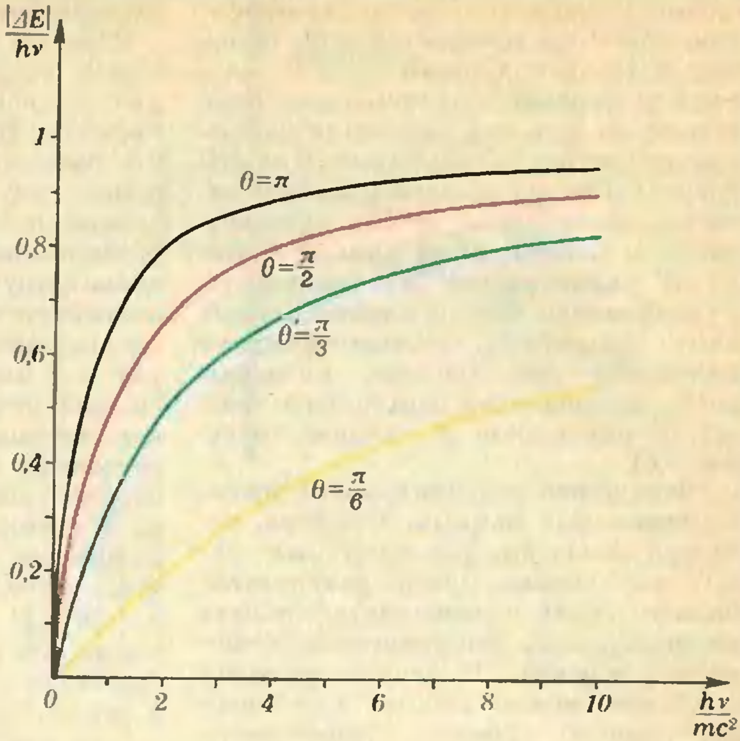


Рис. 6. Зависимость относительного изменения энергии фотона при комптоновском рассеянии от энергии фотона для разных углов рассеяния.

(в левой части уравнения, отражающей состояние системы фотон — электрон до взаимодействия, учтено, что электрон обладает энергией покоя m_0c^2). Эти уравнения позволяют найти величину комптоновского смещения $\Delta\lambda$ для данного угла рассения θ. Учитывая, что $\nu=c/\lambda$, $\nu'=c/\lambda'=c/(\lambda+\Delta\lambda)$, из (4) и (5) получаем:

$$\Delta\lambda=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta). \qquad (6)$$

О чем говорит этот результат? Прежде всего, величина $\Delta\lambda$ оказывается не зависящей от λ и определяется только углом рассеяния θ и фундаментальными постоянными m_0, c и h *). Из формулы (6) к тому же ясно, почему эффект Комптона практически не наблюдается для фотонов видимого света. Если для рентгеновской области отношение $\Delta\lambda_{max}/\lambda$ ($\Delta\lambda_{max}=2h/m_0c$ при рассеянии на угол $\theta=\pi$) составляет несколько процентов (для $\lambda=10^{-10}$м $\Delta\lambda_{max}/\lambda=5\cdot10^{-2}$), то для видимого света $\Delta\lambda_{max}/\lambda$ очень мало (для $\lambda=5\cdot10^{-7}$ м, например, $\Delta\lambda_{max}/\lambda\approx10^{-5}$). С другой стороны, из формулы (6) следует, что $\Delta\lambda/\lambda$ должно возрастать при переходе от рентгеновского к γ-излучению. Это подтверждается наблюдениями: в γ-диапазоне $\Delta\lambda_{max}/\lambda>1$. Формула для $\Delta\lambda$ объясняет и тот факт, что комптоновское смещение не зависит от природы рассеивателя: рассеяние происходит на электронах — частицах, входящих в состав всех веществ.

Можно понять и изменения относительной интенсивности смещенной и несмещенной компонент при смене рассеивателя. Наличие несмещенной компоненты обусловлено рассеянием излучения не свободными электронами, а электронами, сильно связанными с ядрами атомов. В этом случае рассеяние происходит так, как будто фотон сталкивается не с электроном, а с частицей гораздо большей массы, по порядку величины равной массе ядра. Отсюда следует, что $\Delta\lambda$ ничтожно мало (см. (6)). Чем больше порядковый номер элемента, тем бо́льшую долю в общем числе электронов составляют «массивные» электроны, вследствие чего относительная интенсивность несмещенной компоненты растет.

Итак, теория Комптона хорошо объясняла основные черты обнаруженного эффекта. Не следует, однако, думать, что она была встречена единодушным одобрением. Ученый в своих воспоминаниях рассказал об одном эпизоде, хорошо отражающем отношение ученого мира к открытию молодо-

*) Величина $\Lambda=h/(m_0c)$, равная для электрона $2{,}42\cdot10^{-12}$ м, получила название комптоновской длины волны. Она играет важную роль в современной теоретической физике.

го американца. В 1924 году на ежегодной встрече ученых англоязычных стран, где присутствовали такие известные физики, как Резерфорд, Брэгг и другие, вокруг работы Комптона разгорелась столь оживленная дискуссия, что пунктуальные англичане однажды даже пожертвовали обеденным перерывом ради ее продолжения. И все же после встречи к Комптону подошел известный индийский физик Ч. Раман и сказал: «Комптон, вы прекрасный спорщик, но правда не на вашей стороне». По иронии судьбы через три года Раман оказался одним из авторов открытия еще одного вида рассеяния, при котором меняется частота излучения,— так называемого комбинационного рассеяния света *).

Лишь с течением времени теория Комптона, подтвержденная результатами многочисленных экспериментов, завоевала признание.

Эффект Комптона сыграл важную роль в становлении квантовой теории излучения. Заслуги его первооткрывателя были отмечены присуждением Нобелевской премии по физике за 1927 год. Впоследствии ученые выяснили, что этот факт имеет важное значение для астрофизики. Было установлено, что в космосе наблюдается не только прямой эффект Комптона, о котором шла речь выше, но и так называемое обратное рассеяние. По бесконечным просторам Вселенной движется множество очень быстрых электронов, которые могут сталкиваться с фотонами. Диаграмма импульсов для таких столкновений может выглядеть так же, как и на рисунке 5, но направления всех импульсов необходимо сменить на обратные. В результате столкновения электрон останавливается (или почти останавливается), а импульс и, следовательно, энергия фотона увеличиваются. Таким образом, при обратном комптоновском рассеянии происходит уменьшение длины волны фотона, а не возрастание, как в прямом эффекте.

В чем отличие?

Прежде чем закончить разговор об эффекте Комптона, зададимся вопросом: имеются ли какие-либо принципиальные различия между рассеянием фотона на свободном электроне и столкновением шаров? Рассмотрим, например, задачу, аналогичную обсуждавшейся ранее. Запишем относительное изменение энергии фотона при рассеянии:

$$\frac{|\Delta E|}{E} = \frac{h\nu - h\nu'}{h\nu} = 1 - \frac{c}{\nu\lambda'} =$$

$$= 1 - \frac{c}{\nu\,(c/\nu + \Delta\lambda)} = \frac{h\nu\,(1 - \cos\theta)}{m_0c^2 + h\,(1 - \cos\theta)}.$$

На рисунке 6 показаны графики зависимости $|\Delta E|/h\nu$ от отношения $h\nu/m_0c^2$ для нескольких значений θ. Из рисунка видно, что кривые, описывающие рассеяние фотона, существенно отличаются от кривых на рисунке 2. Прежде всего, рассеяние на определенный угол $\theta \neq 0$ возможно при любом отношении $h\nu/mc^2$. Но главное — у кривых на рисунке 6 нет максимумов! Монотонность кривых означает, что с ростом энергии фотона все бо́льшая и бо́льшая ее часть передается при рассеянии электрону. Однако к пределу, равному единице, кривые приближаются лишь при $h\nu \to \infty$ — фотон не может полностью передать свою энергию электрону (в отличие от случая столкновения шаров равной массы).

В чем же причина столь существенного различия? В том, что фотон — особая частица, у которой масса покоя равна нулю. Фотон в покое не существует — он не может остановиться, как это делает шар, налетая на покоящийся шар равной массы.

Таким образом, качественно понять эффект Комптона можно на основе аналогии со столкновением шаров, но детали эффекта вывести из аналогии нельзя, поскольку они определяются своеобразными свойствами фотона. Итак, прост ли эффект Комптона? Да, но простота эта оказывается... сложной.

*) Независимо от Рамана комбинационное рассеяние было открыто и объяснено советскими физиками Г. С. Ландсбергом и Л. И. Мандельштамом.

Всё — во всем. Однако в каждом — особым образом.

Прокл (V век новой эры)

О ЗАДАЧЕ ПИФАГОРА

Доктор физико-математических наук
С. М. ВОРОНИН,
А. Г. КУЛАГИН

В этой статье мы рассмотрим задачу о нахождении решений уравнения

$$\boxed{a^2+b^2=c^2} \qquad (1)$$

в натуральных числах. Частные решения этой задачи были найдены задолго до появления математики как науки. Так, древние вавилоняне знали решение $(a, b, c)=(3, 4, 5)$ и целый ряд других решений уравнения (1), в том числе такие сложные, как (105, 36, 111) или

(12709, 13500, 18541).

Хотя существуют различные точки зрения на математику догреческого периода, нет никаких оснований приписывать вавилонянам владение дедуктивным методом математики. Математика как дедуктивная наука появилась в VI веке до нашей эры в Древней Греции. Традиция связывает первые постановки математических задач в современном понимании с именем Пифагора. Вполне возможно, что математики древнего Египта и Вавилона могли бы вычислить число $\sqrt{2}$ с очень высокой точностью, но постановка вопроса о том, является ли $\sqrt{2}$ рациональным числом, была для них чужда. Точно так же для них была чужда постановка вопроса об описании всех решений уравнения (1). Вопрос этот был поставлен и решен в школе пифагорейцев.

Поэтому, а возможно, также из-за очевидных связей с геометрической теоремой Пифагора, уравнение (1) называется *задачей Пифагора*, а тройки натуральных чисел, удовлетворяющих этому уравнению, называются *пифагоровыми тройками*. Из теоремы Пифагора следует, что каждому прямоугольному треугольнику с целочисленными катетами a, b и гипотенузой c соответствует некоторая пифагорова тройка такая, что $0<a<b<c$, и наоборот. Таким образом, задача Пифагора имеет прозрачный геометрический смысл (рис. 1).

Арифметический способ решения задачи Пифагора

Ясно, что если тройка натуральных чисел (a, b, c) является пифагоровой, то при положительном целом k тройка чисел (ka, kb, kc) также будет пифагоровой. Поэтому для решения задачи Пифагора нет нужды перечислять все пифагоровы тройки (a, b, c) — достаточно перечислить *примитивные* тройки, т. е. такие пифагоровы тройки (a, b, c), для которых нет ни одного целого $k>1$, делящего все три числа a, b, c без остатка.

А перебрать примитивные пифагоровы тройки совсем несложно. Для этого имеется простой рецепт, известный еще пифагорейцам; основанный на следующем утверждении:

> *если p и q — взаимно простые числа разной четности, $p>q$, то тройка чисел*
> $$a=p^2-q^2,\ b=2pq,\ c=p^2+q^2 \quad (*)$$
> *будет примитивной пифагоровой тройкой.*

Например, если взять $q=2\cdot3\cdot7=42$, $p=163$, то получим пифагорову тройку (24805, 13692, 28333).

Доказательство обведенного в рамку утверждения очевидно. Действительно, в силу (*)
$a^2+b^2=(p^2-q^2)^2+4p^2q^2=(p^2+q^2)^2=c^2$,
т. е. тройка (a, b, c) пифагорова. Она к тому же и примитивна: общий мно-

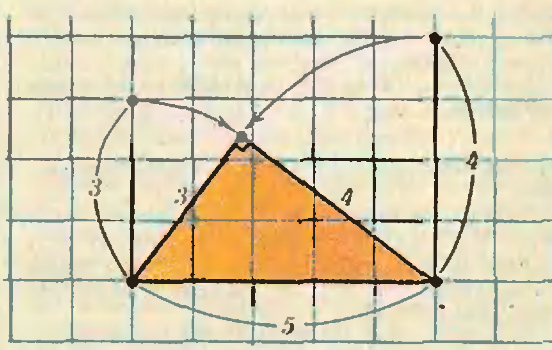


Рис. 1.

житель чисел a, b, c был бы общим множителем чисел $c+a=2p^2$ и $c-a=2q^2$, вопреки взаимной простоте p и q.

Мы доказали, что указанный способ всегда дает примитивную тройку. Оказывается, что:

> *Все пифагоровы тройки могут быть получены способом* (∗).

Ниже мелким шрифтом приводится «арифметическое» доказательство этого замечательного факта; из доказательства видно, как можно было догадаться до формул (∗). Читатели, не любящие арифметические рассуждения, могут сразу перейти к следующему, геометрическому разделу.

Пусть дана примитивная тройка (a, b, c). Условие примитивности можно записать в виде равенства

$$\text{НОД}(a, b, c)=1, \qquad (2)$$

где символ НОД, как обычно, обозначает *наибольший общий делитель* написанных вслед за ним чисел. Обратите внимание, что здесь имеются в виду делители, общие для всех трех чисел a, b, c, а не попарно общие делители. Так, из равенства (2) в общем случае не следует, что

$$\text{НОД}(a, b)=\text{НОД}(b, c)=\text{НОД}(c, a)=1, \quad (3)$$

однако *для любой примитивной пифагоровой тройки равенство* (3) *выполнено*. Действительно, пусть, например, НОД $(a, b)=k>1$. Тогда в силу (1) c^2 делится на k^2, значит, c делится на k, что невозможно в силу (2).

Заметим теперь, что *для любой примитивной тройки* (a, b, c) *числа* a *и* b *— разной четности*. Действительно, они оба не могут быть четными в силу (3). Если же они оба нечетны, скажем, $a=2k+1$, $b=2l+1$, то

$$a^2+b^2=4(k^2+l^2+k+l)+2,$$

т. е. a^2+b^2 делится на 2, но не на 4. Тогда в силу (1) c^2 обладает тем же свойством, значит, c четно ($c=2s$), и тогда $c^2=4s^2$ делится на 4 — противоречие!

Мы установили, что a и b — разной четности; для определенности будем считать, что a *нечетно; тогда* b *четно и* c *нечетно*.

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)=(2m)(2n)=4mn, \quad (4)$$

где m и n — натуральные числа (двойки появились вследствие четности чисел $c+a\ (=2m)$ и $c-a\ (=2n)$).

Лемма. *Числа* m *и* n *являются точными квадратами*

$$m=p^2, \ n=q^2$$

двух взаимно простых чисел p *и* q *разной четности.*

Доказательство леммы мы оставляем читателю. Указание: покажите, что m и n взаимно просты, воспользовавшись равенствами (3), разложите m и n на простые множители и подставьте в (4).

Вспомнив, что $2m=c+a$ и $2n=c-a$, мы получаем

$$2p^2=c+a, \ 2q^2=c-a,$$

откуда $c=p^2+q^2$ и $a=p^2-q^2$. Воспользовавшись (1), получаем и $b=2pq$ — формулы (∗) доказаны.

Геометрический способ решения задачи Пифагора

Следуя методу координат Р. Декарта, дадим уравнению (1) геометрическую интерпретацию. Пусть тройка чисел (a, b, c) удовлетворяет уравнению (1) и является примитивной. Все остальные решения этого уравнения будут получаться из примитивных умножением на натуральное число k, т. е. будут тройками вида (ka, kb, kc). Из уравнения (1) следует, что

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1. \qquad (5)$$

Поскольку $a, b, c>0$ — целые числа, числа a/c и b/c будут рациональными числами. Поскольку $x^2+y^2=1$ есть уравнение окружности единичного радиуса, каждому примитивному решению (a, b, c) уравнения (1) соответствует точка с рациональными координатами $(x=a/c;\ y=b/c)$, лежащая на окружности K с уравнением $x^2+y^2=1$. Точку с рациональными координатами будем в дальнейшем называть *рациональной точкой*. И наоборот, если у нас есть рациональная точка $(x; y)$ с координатами $x=m_1/n_1$ и $y=m_2/n_2$, лежащая на окружности K, то, приводя дроби m_1/n_1 и m_2/n_2 к наименьшему общему знаменателю $c>0$, получим равенство (5), которое дает нам примитивную тройку. Таким образом,

> *имеется взаимно однозначное соответствие между рациональными точками, лежащими на окружности* K, *и примитивными пифагоровыми тройками.*

Тем самым получена геометрическая формулировка задачи Пифагора, а именно: *найти все рациональные точки, лежащие на окружности* K *с уравнением* $x^2+y^2=1$.

Займемся вопросом о нахождении всех таких точек. Для этого будем проводить прямые (рис. 2) через точку $(x_1; y_1)=(-1; 0)$. Всякая прямая, проходящая через точку $(-1; 0)$ и не являющаяся касательной к окружности, пересечет окружность еще ровно в одной точке, скажем $(x_2; y_2)$. Уравнение каждой такой прямой

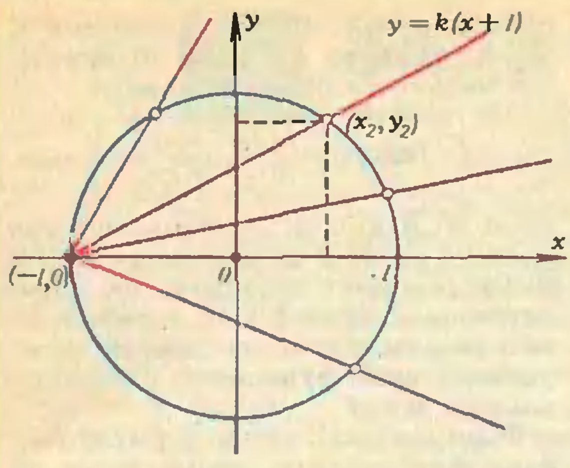


Рис. 2.

имеет вид

$$y=k\,(x+1),$$

где k — угловой коэффициент прямой.

Таким образом, координаты точки $(x_2;\,y_2)$ будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1,\\ y=k\,(x+1). \end{cases}$$

Решим эту систему относительно x и y. Подставляя значение $y=k\,(x+1)$ из второго уравнения в первое уравнение системы, получим

$$x^2+k^2\,(x+1)^2=1,$$

или

$$(1+k^2)\cdot x^2+2k^2\cdot x+k^2-1=0.$$

Если x удовлетворяет последнему уравнению, то x является абсциссой точки пересечения прямой $y=k\,(x+1)$ с окружностью K, т. е. либо $x=x_1=-1$, либо $x=x_2$. Из теоремы Виета следует, что

$$x_1+x_2=-\frac{2k^2}{1+k^2},$$

откуда

$$x_2=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Поскольку точка $(x_2;\,y_2)$ лежит на прямой $y=k\,(x+1)$,

$$y_2=\frac{2k}{1+k^2}.$$

Последние две формулы каждому числу k ставят в соответствие точку

$$(x_2;\,y_2)=\left(\frac{1-k^2}{1+k^2};\ \frac{2k}{1+k^2}\right), \qquad (6)$$

лежащую на окружности $x^2+y^2=1$. Обратно, каждой точке $(x;\,y)\neq(-1;\,0)$, лежащей на окружности K, соответствует одно и только одно значение углового коэффициента k:

$$k=\frac{y}{x+1}. \qquad (7)$$

Заметим здесь, что если k — рациональное число, то точка $(x_2;\,y_2)$, определяемая формулой (6), имеет рациональные координаты, и обратно, если x_2 и y_2 рациональны, то в силу формулы (7) k рационально. Таким образом,

> *между точками с рациональными координатами окружности единичного радиуса (за исключением точки $(-1;\,0)$) и рациональными точками вещественной прямой установлено взаимно однозначное соответствие.*

Заставляя величину k пробегать все рациональные значения интервала от $-\infty$ до $+\infty$, мы переберем все точки с рациональными координатами на окружности K единичного радиуса (за исключением точки $(-1;\,0)$) и тем самым найдем все примитивные решения задачи Пифагора.

Приведем соответствующие формулы. Пусть $k=p/q$, $q>0$, НОД $(p,q)=1$. Тогда из формулы (6) следует, что

$$\boxed{(x_2;\,y_2)=\left(\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2};\ \frac{2pq}{q^2+p^2}\right).} \qquad (**)$$

Мы вновь получили, по существу, формулы (*)! Чтобы получить тот же результат в точности, осталось немного повозиться с четностью.

В случае разной четности p и q формула (**) соответствует примитивной пифагоровой тройке $(a,\,b,\,c)=(q^2-p^2,\ 2pq,\ q^2+p^2)$. Если же p и q одновременно нечетные, то, переходя к новым переменным $q_1=(q+p)/2$, $p_1=(q-p)/2$, НОД $(p,\ q)=1$, получим $q^2+p^2=2(q_1^2+p_1^2)$, $q^2-p^2=4p_1q_1$, $2pq=2\,(q_1^2-p_1^2)$. После сокращения на 2 в (**) получим

$$(x_2;\,y_2)=\left(\frac{2q_1p_1}{q_1^2+p_1^2};\ \frac{q_1^2-p_1^2}{q_1^2+p_1^2}\right). \qquad (8)$$

Заметим, что формула (8) отличается от формулы (**) перестановкой x_2 и y_2. Если окажется, что p_1 и q_1 оба нечетны, то перейдем к переменным $q_2=(p_1+q_1)/2$, $p_2=(q_1-p_1)/2$, НОД $(q_2,\,p_2)=1$ и т. д. В итоге получим либо формулу типа (**), либо формулу типа (8), в которых p_n и q_n имеют разную четность, НОД $(p_n,\,q_n)=1$. Таким образом, примитивное решение, соответствующее рациональной точке $(x_2;\,y_2)\neq(-1;\,0)$, задается либо формулой типа (**), либо формулой типа (8), в которых p и q — взаимно простые числа разной четности. В силу взаимно однозначного соответствия между примитивными решениями уравнения Пифагора и рациональными точками окружности $x^2+y^2=1$ (исключая точку $(-1;\,0)$) из формул (**) и (8) следует утверждение (*).

Рациональная параметризация конических сечений

Для нахождения рациональных точек, лежащих на окружности с уравнением $x^2+y^2-1=0$, мы вывели формулу (6). Она устанавливает взаимно однозначное соответствие между параметром k, принимающим всевозможные действительные значения, и точками окружности (за исключением точки $(-1; 0)$), причем координаты $(x; y)$ точек, лежащих на окружности, являются рациональными функциями от k. Возникает вопрос: можно ли аналогичным образом задавать точки, лежащие на других кривых, скажем на эллипсе, параболе или гиперболе? (Эллипс, парабола и гипербола являются коническими сечениями; отсюда название этого раздела.)

Для ответа на этот вопрос рассмотрим кривую на плоскости, заданную уравнением $K(x, y)=0$, где $K(x, y)$ — квадратный многочлен от x и от y. Точки, лежащие на параболе, эллипсе и гиперболе, как раз удовлетворяют такого рода соотношению. Пусть $(x_1; y_1)$ — какая-нибудь фиксированная точка такой кривой. Проведем через эту точку прямую с угловым коэффициентом, равным k (рис. 3). Будем искать точки $(x; y)$ пересечения кривой и прямой. Координаты $(x; y)$ этих точек удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} K(x, y)=0, \\ y-y_1=k(x-x_1). \end{cases}$$

Решая эту систему относительно $(x; y)$ так же, как мы это делали раньше для окружности, выразим координаты $(x_2; y_2)$ второй точки пересечения прямой $y=y_1+k(x-x_1)$ с кривой K через параметр k. Легко проверить, что получится выражение вида

$$\boxed{(x_2; y_2)=\left(\frac{A(k)}{C(k)}; \frac{B(k)}{C(k)}\right),} \qquad (***)$$

где $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ — многочлены степени не выше 2 от параметра k. Эта формула задает *рациональную параметризацию* кривой K, т. е. выражает координаты точки на кривой через рациональные функции от одного параметра k.

Формула (***), как и формула (**), позволяет находить целые точки на кривой K. Однако сейчас нас интересует другое — совсем неожиданное — применение этой формулы, к которому мы переходим.

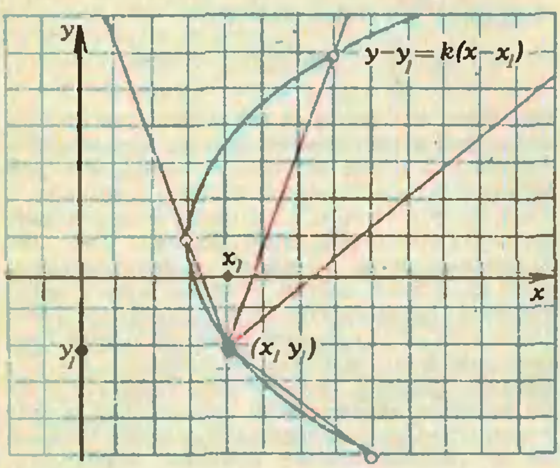


Рис. 3.

Применение к вычислению интегралов

Оказывается, что такие безнадежные с виду интегралы, как

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}},$$

берутся, если воспользоваться рациональной параметризацией подходяще выбранной кривой. Именно, если в данном случае взять кривую

$$K(x, y)=y^2-(x^2+3x-4),$$

заметить, что точка $(x_1; y_1)=(-4; 0)$ лежит на кривой

$$y(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$$

и рассмотреть всевозможные прямые

$$y=k(x+4),$$

то получится следующая параметризация (проделайте выкладки самостоятельно!):

$$(x; y)=\left(\frac{1+4k^2}{1-k^2}; \frac{5k}{1-k^2}\right).$$

Тогда $dx=\frac{10k}{(1-k^2)^2}\,dk$, и поэтому (после сокращений) получим

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int\frac{dx}{y(x)}=\int\frac{2dk}{1-k^2}.$$

Последний интеграл уже легко вычислить:

$$\int\frac{2dk}{1-k^2}=\int\frac{dk}{1-k}+\int\frac{dk}{1+k}=$$
$$=\ln|1+k|-\ln|1-k|+C=$$
$$=\ln\left|\frac{1+k}{1-k}\right|+C.$$

(Окончание см. на с. 28)

Задачник „Кванта"

Задачи

M1021—M1025; Ф1033—Ф1037

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 марта 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1 — 87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1021, M1022» или «Ф1033». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике»

M1021. Альпинист хочет подняться на скалу высотой 1000 м. После ночевки в лагере у подножья скалы он может подниматься, навешивая веревку, со скоростью 40 метров в час, а после холодной ночевки на скале — 30 метров в час. По готовой веревке он поднимается со скоростью 400 метров в час. За сколько дней он сможет достичь вершины, если будет работать на скале (включая подъем по веревке) 6 часов в день? (Временем спуска и других операций пренебречь.)

M1022. Первые 8 натуральных чисел можно расставить в две строки так, что сумма чисел в верхней строке равна сумме чисел в нижней, а суммы чисел в столбцах также равны между собой. Можно ли расставить подобным образом первые а) десять, б) двенадцать натуральных чисел?

1	4	6	7
8	5	3	2

в) При каких натуральных n можно расставить таким образом числа от 1 до $2n$?

М. И. Штеренберг

M1023. Всегда ли из 100 треугольников найдется хотя бы один такой, что его можно целиком покрыть остальными 99?

Г. А. Гуревич

M1024*. Докажите, что для любых двух треугольников с углами α, β, γ и α_1, β_1, γ_1 выполнено неравенство

$$\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma_1}\leqslant \operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma.$$

Р. П. Ушаков

M1025*. Две прямые, проведенные через одну и другую точку пересечения продолжений противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разрезают его на четыре меньших четырехугольника. Докажите, что если в два из них, не имеющие общей стороны, можно вписать окружности, то и в исходный четырехугольник можно вписать окружность.

И. Ф. Шарыгин

Ф1033. Через блок радиусом R перекинут однородный гибкий канат массой m и длиной l, прикрепленный к двум крюкам на потолке, расположенным на расстоянии $2R$ (рис. 1). На оси блока висит груз, масса которого вместе с блоком M. Трение между канатом и блоком отсутствует. Найти минимальную силу натяжения каната.

В. И. Чивилев

Ф1034. Моль идеального газа из начального состояния *1* с температурой $T_1=100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, совершает некоторую работу и переходит в состояние *2* (рис. 2). Этот переход происходит без подвода либо отвода тепла. Затем газ сжимают в процессе $2\to3$, в котором давление является линейной функцией объема, и наконец, в изохорическом процессе $3\to1$ газ возвращается в исходное состояние. Найти работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе $1\to2$, если в процессах $2\to3\to1$ к газу в итоге подведено Q 72 Дж тепла. Из-или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя пишите, пожалуйста, печатными буквами.

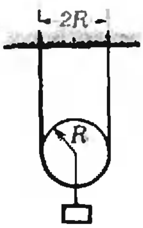


Рис. 1.

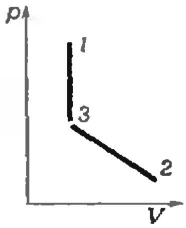


Рис. 2.

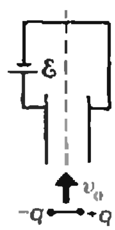


Рис. 3.

вестно также, что $T_2=T_3$, $V_2=3V_1$; газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

А. А. Шеронов

Ф1035. Электрический диполь из двух жестко связанных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга, пролетает плоский конденсатор, пластины которого подключены к источнику с ЭДС $\mathscr{E}$ (рис. 3). Определите скорость диполя в центре конденсатора, если известно, что его скорость вдали от конденсатора равна v_0. Расстояние между пластинами конденсатора d, масса диполя m. Силой тяжести пренебречь.

А. В. Шелагин

Ф1036. К телу массой $m=20$ г, лежащему на гладком горизонтальном полу, привязаны две одинаковые упругие нити жесткостью $k=10^4$ Н/м. Одна нить прикреплена к стене, свободный конец второй нити начинают тянуть в горизонтальном направлении со скоростью $v=10$ м/с. Какая нить порвется, если разрыв каждой нити происходит при абсолютном удлинении $\Delta l_{пр}=5$ см? Считать, что закон Гука выполняется для нитей вплоть до их разрыва; трения нет.

Е. П. Соколов

Ф1037. В полой сфере проделано маленькое отверстие, через которое внутрь проникает узкий параллельный пучок света. Внутренняя поверхность сферы отражает свет во все стороны одинаково (диффузно) и не поглощает его. Как будут различаться в этом случае освещенности в точке, диаметрально противоположной отверстию, и во всех остальных точках сферы?

Problems

M1021—M1025; P1033—P1037

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than March 15th 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 31/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KWANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclo-

M1021. A mountain climber intends to go up a sheer rock wall of 1000 m. After spending a warm night in camp near the wall's base, he climbs up, hanging up ropes, with vertical velocity 40 m per hour. After a cold night on the wall itself, his velocity decreases to 30 m per hour. When the ropes are already hanging, he climbs 400 m per hour. How many days will he take to reach the top if he is able to work 6 hours a day on the wall. (The time for climbing down and other operations is negligible).

M1022. The first 8 natural numbers may be written in two rows (see the table on p. 15) so that the sum of numbers in the upper row equals that in the lower one, and the column sums are also equal to each other. Can the first a) ten, b) twelve natural numbers be arranged in this way?

c) For what natural n can the numbers 1 to $2n$ be arranged this way?

M. I. Shterenberg

M1023. Is it always possible to find one triangle among any 100 which can be covered entirely by the other 99?

G. A. Gurevich

M1024*. Prove that for any two triangles with angles α, β, γ and α_1, β_1, γ_1 the following inequality holds

$$\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma}\leqslant \operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma.$$

R. P. Ushakov

M1025*. Two straight lines, passing each through one of two different intersection points of the extended sides of a convex quadrilateral, divide it into four lesser quadrilaterals. Show that if circles can be inscribed into two of them (not having a common se an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

side) then a circle can be inscribed into the original quadrilateral.

I. F. Sharygin

P1033. A uniform flexible cable of mass m and length l is thrown over a pulley of radius R, fixed to the ceiling by two hooks located at the distance $2R$ from each other (see figure Рис. 1). A weight hangs on the pulley's axis, its mass (together with that of the pulley) being M. There is no friction between the cable and the pulley. Find the minimal tension in the cable.

V. I. Chivilev

P1034. One mole of ideal gas in the initial state *1* with temperature $T_1=100$ K, expanding by means of a turbine into an empty vessel, performs a certain amount of work, passing into state *2* (see figure Рис. 2). This transfer takes place without addition or loss of heat. Then the gas is compressed in the process $2\to3$, in which the pressure is a linear function of volume, and finally in the isochoric process $3\to1$ the gas returns to its initial state. Find the work performed by the gas in expanding via the turbine in the transfer $1\to2$ if the total amount of heat added to the gas in the processes $2\to3\to1$ is $Q=72$ J. It is also known that $T_2=T_3$, $V_2=3V_1$; the gas constant is $R=8.31$ J/ (mole · K).

A. A. Sheronov

P1035. An electric dipole of two rigidly connected point charges $+q$ and $-q$ located at the distance l from each other flies through a flat capacitor whose plates are connected to a source of constant E. M. F. $\mathscr{E}$. Determine the velocity of the dipole in the centre of the capacitor, if it is known that it equals v_0 far away from the latter. The distance between the plates of the capacitor is d, the mass of the dipole is m. The gravitational force is negligible.

A. V. Shelagin

P1036. Two identical inelastic strings of rigidity $k=10^4$ N/m are tied to a body of mass $m=20$ g placed on a smooth horizontal floor. One string is fixed to the wall, the free end of the other is pulled horizontally with velocity $v=10$ m/s. Which string will rip, if the ripping takes place at absolute length increase $\Delta l=5$ cm? Assume that Hooke's law holds for the strings up to the moment of ripping; there is no friction.

E. P. Sokolov

P1037. A narrow beam of parallel light rays penetrates through a little hole into a hollow sphere. The inner surface reflects light identically in all directions (diffusely) and does not absorb light. How will the illumination at the point diametrically opposed to the hole differ from that of the other inner points of the sphere?

Решения задач

M1001, M1003*)—M1005; Ф1013—Ф1016

M1001. *В куче 1001 камень. Она произвольно делится на две кучи, подсчитывается число камней в них и записывается произведение этих двух чисел. Затем с одной из этих куч (в которой больше одного камня) проделывается та же операция: она делится на две и записывается произведение чисел камней в двух вновь образовавшихся кучах. Затем*

Ответ: 500500. Этот ответ легко угадать: если при каждой операции снимать с одной и той же кучи один камень, то искомая сумма окажется равной $1000+999+...+1=(1000\cdot1001)/2$. Докажем индукцией по числу n камней в куче ($n\geqslant2$), что независимо от способа разбиения рассматриваемая сумма $S(n)$ будет равна $(n-1)+(n-2)+...+1=(n-1)n/2$.

При $n=2$ это очевидно. Пусть известно, что $S(k)=(k-1)k/2$ при всех $k<n$. Если на первом шагу куча из n камней была разделена на кучи из k и l камней ($k+l=n$), то независимо от порядка дальнейших разбиений по предположению индукции

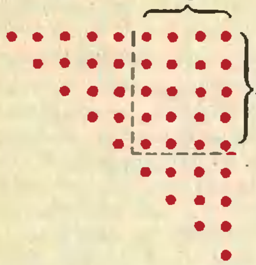
$$S(n)=kl+S(k)+S(l)=kl+(k-1)k/2+(l-1)l/2=$$
$$=((2kl+k^2+l^2)-(k+l))/2=(n-1)n/2,$$

что и требовалось.

У этой задачи есть также красивые решения без индукции.

*) Решение задачи M1002 будет опубликовано в следующем номере журнала.

та же операция повторяется с одной из трех получившихся куч и так далее, пока во всех кучах не станет по одному камню. Чему равняется сумма 1000 записанных произведений?



Одно показано на рисунке (в верхнем ряду n красных точек, а всего в треугольнике $n+(n-1)+...+1=$ $=n(n-1)/2$ красных точек). Разбивая кучу из n камней на две из k и $n-k$ камней, отделяем пунктиром прямоугольник, содержащий $k(n-k)$ красных точек. Ясно, что повторяя эту процедуру мы учтем по разу все красные точки.

Еще одно, пожалуй, самое красивое решение. Свяжем вначале все камни попарно нитями (их будет столько, сколько пар камней). Разбивая очередную кучу на две, будем разрезать все нити, связывающие камни из двух образующихся при этом кучек — число таких нитей равно как раз произведению чисел камней в образующихся кучах. Поэтому итоговая сумма произведений будет равна числу нитей.

А. С. Меркурьев

M1003. *В треугольнике ABC проведены три высоты AH, BK, CL. Докажите равенства*
$$AK\cdot BL\cdot CH= =AL\cdot BH\cdot CK= HK\cdot KL\cdot LH.$$

Пусть углы при вершинах A, B, C данного треугольника равны соответственно α, β, γ. Тогда $AK=$ $=AB|\cos\alpha|$, $AL=AC|\cos\alpha|$ (знак модуля предусматривает случай тупого угла α; см. рис. 1, 2), следовательно, треугольник AKL подобен треугольнику ABC с коэффициентом $|\cos\alpha|$ и $KL=BC|\cos\alpha|$. Подставляя в равенства из условия задачи эти выражения и анало-

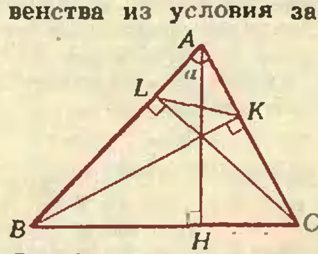


Рис. 1.

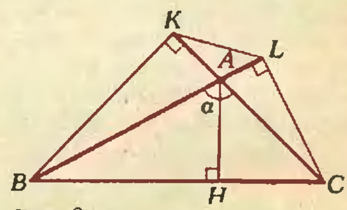


Рис. 2.

гичные выражения через стороны и углы данного треугольника остальных отрезков, входящих в эти равенства, получим, что все три рассматриваемые произведения равны $AB\cdot BC\cdot CA\cdot|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma|$.

С. А. Генкин

M1004. *Через вершину A треугольника ABC, в котором $AB\neq AC$, проводятся всевозможные прямые. Докажите, что*

а) на каждой из них найдется не более одной точки M, отличной от вершин треугольника, для которой $\angle ABM=\angle ACM$;

б) имеется не более пяти из этих прямых, на которых нет ни одной такой точки M.

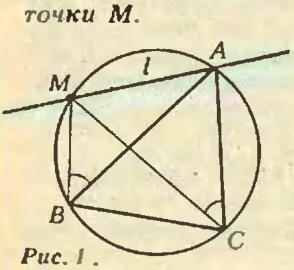


Рис. 1.

а), б) Рассмотрим три случая расположения прямой l, проходящей через A.

1) *Прямая l содержит вершину B или C.* В этом случае, очевидно, искомых точек на ней нет ($\angle ABM$ может равняться $\angle ACM$ только при $M=A$).

2) *Точки B и C лежат по одну сторону от l* (рис. 1). Тогда из равенства $\angle ABM=\angle ACM$ следует, что точки A, B, C и M лежат на одной окружности, то есть M есть отличная от A точка пересечения описанной окружности треугольника ABC с прямой l. Такой точки не существует, если прямая l касается окружности ABC. Для всех остальных рассматриваемых здесь прямых точка M существует и единственна.

3) *Точки B и C лежат по разные стороны от l.* Пусть B_1 — точка, симметричная B относительно l. Если она не лежит на прямой AC (рис. 2), то треугольник ABC можно заменить на AB_1C ($\angle ABM=\angle AB_1M$ для всех точек M прямой l), причем B_1 и C лежат уже по одну сторону от l. Теперь из сказанного в случае 2) следует, что на любой прямой l имеется не более одной искомой точки, и более того, этих точек нет только тогда, когда l касается описанной окружности треугольника AB_1C. Пусть l — такая прямая (рис. 3).

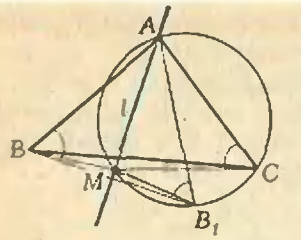


Рис. 2.

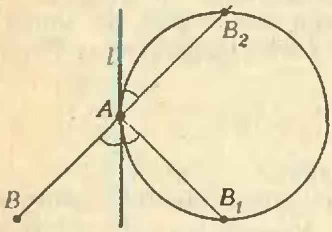


Рис. 3.

Продолжим прямую BA до пересечения с окружностью AB_1C в еще одной точке B_2. Ясно, что хорды AB_1 и AB_2 образуют равные углы с касательной l, следовательно, они равны между собой, то есть $AB_2=AB$. Таким образом, исключительная прямая здесь только одна — касательная к окружности AB_2C, где B_2 — точка, симметричная B относительно точки A. Наконец, если точка B_1 попадает на прямую AC, то есть l — биссектриса угла BAC, то равенство $\angle AB_1M=\angle ACM$ при $M\neq A$ невозможно (поскольку $AB_1=AB\neq AC$).

Итак, мы доказали, что на всех прямых, за исключением пяти (AB и AC, касательных к окружностям ABC и AB_2C и биссектрисы угла BAC), имеется ровно одна искомая точка M.

О. Р. Мусин

М1005. *Клетки квадратной таблицы размером $n\times n$ ($n\geqslant 3$) заполняются числами ± 1 по следующим правилам:*
1) во все граничные клетки таблицы помещаются числа -1;
2) число, помещаемое в очередную незаполненную клетку таблицы, равно произведению ближайших к этой клетке чисел, расположенных по разные стороны от нее и лежащих или в одной строке с ней, или в одном столбце с ней. Так делается до тех пор, пока все пустые клетки таблицы не будут заполнены.
а) Какое наибольшее количество $+1$ может получиться в таблице?
б) Какое наименьшее количество $+1$ может получиться в таблице?

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	a					b	-1
-1							-1
-1							-1
-1							-1
-1	d						-1
-1	f	e				c	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

а) Ответ: 1 при $n=3$, $(n-2)^2-1$ при $n\geqslant 4$. При $n=3$ в единственную свободную клетку ставится $+1$. Пусть далее $n\geqslant 4$.

Покажем, что хотя бы в одну клетку, а точнее, хотя бы в одну клетку голубой «рамки» на рисунке будет вписана -1. Допустим, что все числа в рамке равны $+1$. Выберем тот из углов рамки, который заполнялся последним; пусть это будет левый нижний угол. Слева и снизу от него стоят числа -1, а справа и сверху — числа $+1$ (соседние углы рамки уже заполнены!), следовательно, в этот угол можно вписать только -1. Это противоречит нашему предположению, поэтому в таблице не более $(n-2)^2-1$ чисел $+1$.

Если заполнять таблицу в следующем порядке: сначала клетки a и b (см. рисунок), выбирая сомножители по столбцу, потом клетки c и d по строке, а потом e — снова по столбцу, мы поставим во все эти клетки $+1$. Пользуясь ими, можно поставить $+1$ во все клетки рамки, кроме клетки f. После этого все клетки внутри рамки будут заполнены числами $+1$. При таком заполнении мы получим ровно $(n-2)^2-1$ чисел $+1$.

б) Ответ: $n-2$. Допустим, что количество чисел $+1$ в таблице оказалось меньше, чем $n-2$. Тогда найдутся строк и столбец, заполненные сплошь числами -1. Но это невозможно, поскольку клетка, стоящая на их пересечении, при заполнении таблицы все время была бы окружена со всех четырех сторон числами -1, а значит, в нее можно было бы вписать только $+1$.

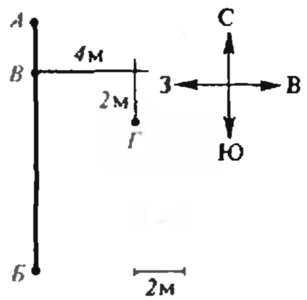
Таким образом, в таблице всегда не меньше, чем $n-2$ чисел $+1$. Пример заполнения, при котором получается ровно $n-2$ чисел $+1$, строится так: будем вписывать числа построчно, выбирая сомножители по столбцам в следующем порядке — сначала заполним 2-ю строку, затем $(n-1)$-ю, $(n-2)$-ю, ..., 3-ю. В результате во 2-й строке все числа (кроме крайних) будут равны $+1$, а все остальные числа таблицы будут равны -1.

Н. Х. Агаханов

Ф1013. *Два спортсмена стоят в точках А и Б и держат резиновый шнур.*

Во время движения в любой момент времени шнур натянут равномерно, и следовательно, отношение расстояний от узла B до концов шнура с течением

По сигналу спортсмен А начинает двигаться на восток со скоростью $v_0=1$ м/с, а спортсмен Б — на юг с постоянным ускорением. Найдите это ускорение, если известно, что узел В, завязанный на шнуре, при движении прошел через точку Г (масштаб указан на рисунке).



времени меняться не будет. Из рисунка находим, что в начальный момент это отношение равно

$$|AB| : |BБ| = 1 : 4.$$

Очевидно, что смещение Δx узла на восток определяется смещением ΔS_a бегуна A и в любой момент составляет 4/5 от этого смещения, т. е.

$$\Delta x = \frac{4}{5}\Delta S_a = \frac{4}{5}v_0 t.$$

Пользуясь масштабом, приведенным на рисунке, находим, что точка $Г$ смещена на восток от точки B на $\Delta x = 4$ м. Следовательно, узел прошел точку $Г$ через время

$$t = \frac{5}{4}\frac{\Delta x}{v_0} = 5\text{ с}$$

после начала движения бегунов.

Смещение Δy узла на юг определяется смещением $\Delta S_б$ бегуна $Б$, и в любой момент $\Delta y = \frac{1}{5}\Delta S_б$. Пользуясь масштабом, находим, что за время $t = 5$ с узел сместился от начального положения (т. B) на юг на $\Delta y = 2$ м. Следовательно, бегун $Б$, двигаясь с ускорением a, за $t = 5$ с прошел путь $\Delta S_б = 5\Delta y = 10$ м, т. е.

$$\frac{1}{2}at^2 = \Delta S_б \Rightarrow a = 2\frac{\Delta S_б}{t^2} = \frac{20}{25}\text{ м/с}^2 = 0{,}8\text{ м/с}^2.$$

С. С. Кротов

Ф1014. *Мощный транзистор, выделяющий тепло, закреплен на теплоотводящей пластине, обдуваемой воздухом, температура которого равна 30 °С. На рисунке показано распределение температур на пластине. Определите рассеиваемую мощность. Известно, что равномерно нагретая до 70 °С пластина рассеивает мощность $P = 10$ Вт при температуре воздуха 20 °С. Теплоотдача пропорциональна разности температур пластины и воздуха.*

Разобьем пластину на одинаковые маленькие участки (на рисунке таких участков 130). Понятно, что мощность P, рассеиваемая пластиной, равна сумме $\sum p_i$ мощностей, рассеиваемых отдельными участками.

Мощность, которая уносится с каждого участка, равна

$$p_i = p_0 \cdot \Delta t_i,$$

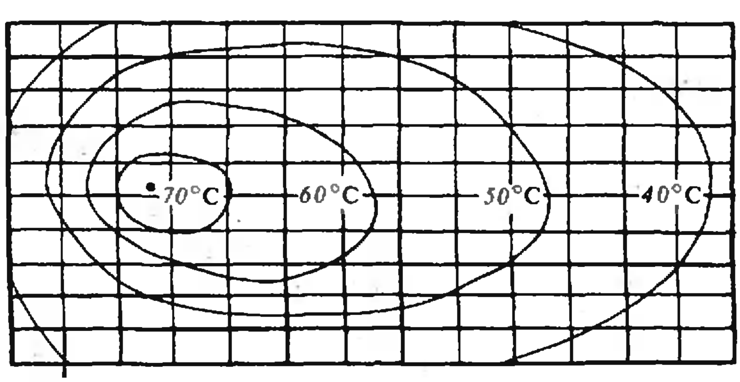
где Δt_i — разность температур участка и воздуха, p_0 — коэффициент пропорциональности. Известно, что при температуре воздуха $t_{в1} = 20$ °С с пластины, равномерно нагретой до $t_1 = 70$ °С, уносится мощность $P = 10$ Вт. При этом с каждого участка уносится одна и та же мощность

$$p = \frac{P}{130} = p_0(t_1 - t_{в1}).$$

Отсюда находим p_0:

$$p_0 = \frac{P}{130(t_1 - t_{в1})} = \frac{10}{130 \cdot 50}\text{ Вт/град} = 1{,}54 \cdot 10^{-3}\text{ Вт/град}.$$

Для оценки мощности, рассеиваемой неравномерно нагретой пластиной при температуре воздуха 30 °С,



будем считать, что температура участков, лежащих между изотермами 60 °С и 70 °С, равна 65 °С (для этих участков $\Delta t=35$ °С), между изотермами 60 °С и 50 °С — 55 °С ($\Delta t=25$ °С), и т. д. Тогда полную мощность, рассеиваемую пластиной, можно найти так:

$$P_1\approx 1{,}54\cdot 10^{-3}(45\cdot 4+35\cdot 17+25\cdot 30+15\cdot 60+5\cdot 20)\text{Вт}=1{,}54\cdot 10^{-3}\cdot 2525\ \text{Вт}\approx 3{,}9\ \text{Вт}.$$

Для оценки точности этого результата можно посмотреть, как влияет на результат неточность оценки температуры «долей» пластины. Возьмем вместо 65 °С — 67,5 °С, вместо 55 °С — 57,5 °С и т. д. Тогда

$$P_{\text{верх}}\approx 1{,}54\cdot 10^{-3}(47{,}5\cdot 4+37{,}5\cdot 17+27{,}5\cdot 30+17{,}5\cdot 60+7{,}5\cdot 20)\approx 4{,}4\ \text{Вт}.$$

Оценку сразу получим, взяв заниженные температуры:

$$P_{\text{нижн}}\approx 1{,}54\cdot 10^{-3}(42{,}5\cdot 4+32{,}5\cdot 17+22{,}5\cdot 30+12{,}5\cdot 60+2{,}5\cdot 20)\approx 3{,}4\ \text{Вт}.$$

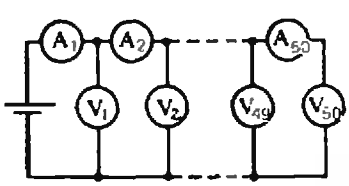
Итак,

$$P_1=(3{,}9\pm 0{,}5)\text{Вт}.$$

Конечно, мы сильно «завысили» возможную неточность определения температуры. Однако нужно понимать, что эта неточность — не единственная (да и не самая важная) причина погрешностей нашего расчета. Условие задачи идеализировано, оно не учитывает конвекции воздуха, которая сильно меняет результат.

А. Р. Зильберман

Ф1015. *Схема, приведенная на рисунке, содержит 50 разных амперметров и 50 одинаковых вольтметров. Показания первого вольтметра $U_1=9{,}6$ В, первого амперметра — $I_1=9{,}5$ мА, второго амперметра — $I_2=9{,}2$ мА. Определите по этим данным сумму показаний всех вольтметров.*



Ток, текущий через амперметр A_1, равен сумме токов, текущих через вольтметр V_1 и амперметр A_2, т. е.

$$I_1=I_{V1}+I_2;$$

следовательно, ток, текущий через вольтметр V_1, равен

$$I_{V1}=I_1-I_2=0{,}3\ \text{мА},$$

и сопротивление вольтметра —

$$R=\frac{U_1}{I_{V1}}=\frac{9{,}6}{0{,}3\cdot 10^{-3}}\ \text{Ом}=32\ \text{кОм}.$$

По условию задачи все вольтметры одинаковые, т. е. сопротивление каждого из них 32 кОм.

Запишем сумму напряжений, показываемых всеми вольтметрами:

$$\sum_{i=1}^{50} U_{Vi}=\sum_{i=1}^{50} I_{Vi}R=R\sum_{i=1}^{50} I_{Vi}.$$

Но $\sum_{i=1}^{50} I_{Vi}$ — это ток, текущий через амперметр A_1, т. е. $\sum_{i=1}^{50} I_{Vi}=I_1$. Поэтому

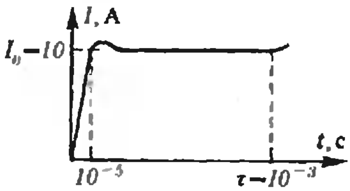
$$\sum_{i=1}^{50} U_{Vi}=RI_1=304\ \text{В}.$$

А. Р. Зильберман

Ф1016. *В катушку может свободно втягиваться ферромагнитный сердечник массой $M=0{,}01$ кг. Катуш-*

При втягивании ферромагнитного сердечника в катушку меняется индуктивность катушки. В этом случае закон электромагнитной индукции должен быть записан следующим образом:

ку подключили к источнику с напряжением $U=100$ В, и через нее протек ток, показанный на графике на рисунке. Оцените начальную индуктивность катушки. Пренебрегая потерями, найдите скорость сердечника в момент $\tau=10^{-3}$ с.



$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{d(LI)}{dt}=U.$$

Здесь L — индуктивность катушки, зависящая от времени, I — ток в катушке, который также зависит от времени. Поэтому

$$\frac{d(LI)}{dt}=I\frac{dL}{dt}+L\frac{dI}{dt}=U. \qquad (*)$$

В начальный период, когда сердечник еще не сдвинулся с места, можно считать, что индуктивность не меняется. Тогда $\frac{dL}{dt}=0$, и уравнение (*) имеет вид

$$L_0\frac{dI}{dt}=U,$$

где L_0 — начальная индуктивность катушки. Из графика находим, что в этот период $\frac{dI}{dt}=10^6\ \frac{\text{А}}{\text{с}}$. Следовательно,

$$L_0=\frac{100\ \text{В}}{10^6\ \text{А/с}}=10^{-4}\ \text{Гн}.$$

Величина L_0 достаточно мала, чтобы в дальнейшем ее не учитывать (тем более что ток, как видно из графика, в дальнейшем меняется очень мало). Поэтому при $t>10^{-5}$ с уравнение (*) принимает следующий вид:

$$I\frac{dL}{dt}=U.$$

Отсюда видно, что L будет расти линейно со временем, поскольку $U=100$ В$=$const и $I=10$ А$=$const:

$$L=\frac{U}{I}t.$$

В момент $t=\tau=10^{-3}$ с

$$L_\tau=\frac{100}{10}\cdot 10^{-3}\ \text{Гн}=10^{-2}\ \text{Гн}.$$

Найдем скорость сердечника в этот момент. Пренебрегая потерями, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_\tau^2}{2}+L_\tau\frac{I^2}{2}=IU\tau,$$

где $IU\tau$ — работа источника за время $\tau=10^{-3}$ с, $L_\tau I^2/2$ — электромагнитная энергия катушки, $mv_\tau^2/2$ — кинетическая энергия ферромагнитного сердечника. Отсюда находим v:

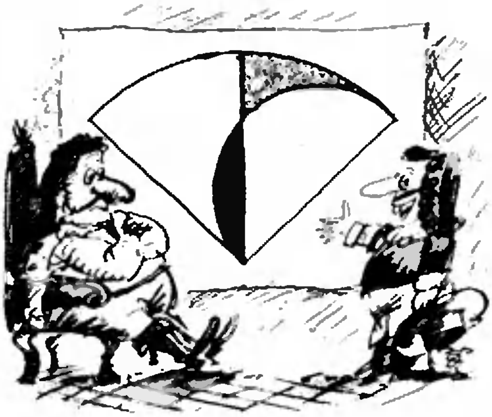
$$v=\sqrt{\frac{2IU\tau-L_\tau I^2}{m}}=10\ \text{м/с}.$$

По решению этой задачи необходимо сделать некоторые замечания. Эта задача относится к так называемым «оценочным» задачам, в которых, как правило, некоторые величины задаются приблизительно или их надо найти из графика, другие необходимо найти приближенно, пренебрегая какими-то малыми величинами. В данной задаче мы не учитывали активное сопротивление источника, потери в сердечнике на токи Фуко; не учитывали, что ток в сердечнике после первого скачка не будет постоянным во времени, а будет немного меняться; ну и конечно, мы не рассматривали переходный процесс от малой индуктивности к большой. Точное решение этой задачи достаточно сложно; однако полученные нами оценки близки к реальным величинам.

В. Е. Скороваров

„Квант" для младших школьников

Задачи



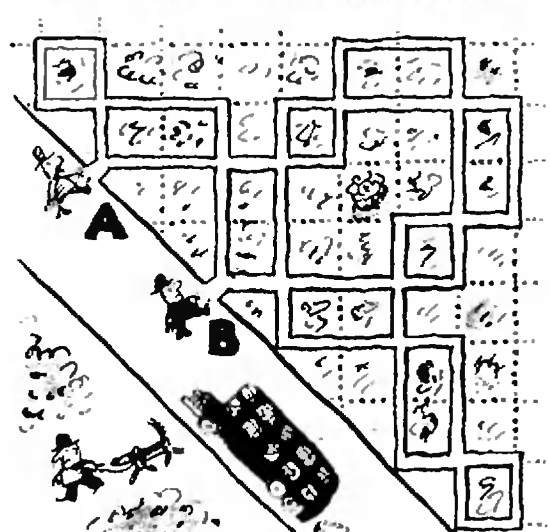
1.Король Артур заказал художнику рисунок для своего щита, имеющего форму четверти круга, с просьбой окрасить его в три цвета: желтый — цвет доброты, красный — храбрости и синий — мудрости. Когда художник принес рисунок, оруженосец сказал, что на рисунке храбрости больше, чем ума. Однако художник смог доказать, что там того и другого поровну. Как?

2. Решите числовой ребус, записанный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

```
  ШЕПНУЛ
+ ШЕПНУЛ
  ШЕПНУЛ
  ШЕПНУЛ
  ШЕПНУЛ
 -------
 КРИКНУЛ
```

3. Однажды я заблудился в лесу. Уже собирался остановиться, чтобы развести костер и заночевать, как споткнулся о водопроводную трубу. Ясно, что нужно идти вдоль трубы, но в какую сторону? Туда, куда течет вода, ведь она течет к людям. А как определить, куда течет вода?

4. Урожай фруктов в этом году был отличный. Мы наварили 19 банок варенья. Я расставил их на трех полках в погребе так, чтобы на каждой полке стояло одинаковое количество литров варенья. На первую полку я поставил одну большую и четыре средние банки, на вторую — две большие и шесть литровых банок, а на третью — одну большую, три средних и три литровых банки. Сколько литров варенья мы сварили?



5. Два джентльмена были чрезвычайно схожи в своих привычках и видимо поэтому терпеть друг друга не могли. Однажды, прогуливаясь по улице, они увидели друг друга и одновременно свернули в парк: один в ворота *A* (см. рисунок), второй — в ворота *B*. Каждый решил обойти этот хорошо знакомый им парк, пройдя ровно по одному разу по каждой дорожке. Покажите, что если они все время будут двигаться с одинаковыми скоростями, то непременно встретятся.

Эти задачи нам предложили *А. Н. Савин*, ученик 9 класса Кармелавской средней школы Лит. ССР *Герман Сафин*, *М. И. Лобак*, *В. Д. Вьюн*, *В. В. Произволов*.

НА КРУГИ СВОИ

А что будет, если...

Кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН

В детстве я очень любил калейдоскоп. Глядишь в волшебную трубочку и видишь великолепную мозаику. Небольшой поворот — и новый узор, еще поворот — и опять новый и новый узор.

Когда мне в руки впервые попал кубик Рубика, то мне сначала было интересно просто покрутить его, как раньше я крутил калейдоскоп, полюбоваться возникающей игрой красок на его гранях. Однако бессистемное кручение вскоре мне наскучило. После нескольких часов попыток самостоятельно открыть «рецепт» собирания кубика я достал номер «Кванта» *) и, потратив еще около часа, кубик собрал.

Теперь я начал обращаться с кубиком осторожнее, чтобы его можно было легко вернуть в «собранное» положение. Покрутил одну грань раз (рис. 1), еще раз, еще и еще — кубик вновь собран.

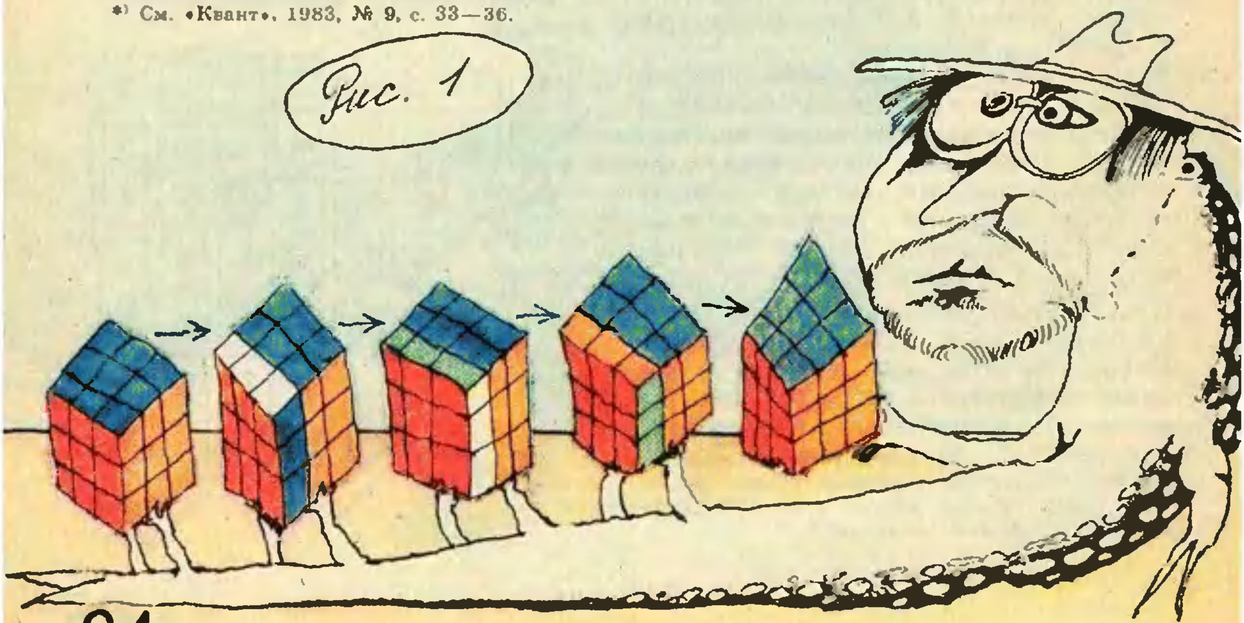
А что будет, если вертеть по очереди две соседние грани, скажем, в одну и ту же сторону? Первая-вторая раз, первая-вторая два, первая-вторая три... (рис. 2). В это время я уже знал, что через несколько пар вращений кубик вновь «соберется». У меня начали уставать пальцы, я сбивался со счета, а кубик все не «собирался». Лишь после 105 пар вращений кубик собрал свои цвета на гранях.

Но откуда я знал, что такой момент наступит? Просто перед этим я немного порассуждал. Различных положений у кубика хотя и много, но конечное число. Раз так, то он не может всякий раз оказываться в новом положении, рано или поздно появится положение, в котором кубик уже был. Обозначим такое положение буквой A, а «собранное» положение буквой E (рис. 3, с. 27). После пары вращений кубик переходит из состояния A в состояние B, потом из состояния B в состояние C и т. д., пока он снова не очутится в положении A и все снова начнет повторяться. Как говорят математики, *положения кубика будут периодически повторяться.*

Давайте сформулируем полученный результат, уже отвлекаясь от кубика — объекта, для которого он был получен.

> *Если объект может находиться в конечном числе состояний и определена операция, однозначно переводящая каждое состояние в новое, то, последовательно применяя эту операцию, получим периодически повторяющуюся последовательность состояний объекта.*

*) См. «Квант», 1983, № 9, с. 33—36.



Это утверждение звучит как закон природы или математическая теорема. На самом деле так оно и есть. Более того, с помощью этого утверждения мы сможем получить очень интересные результаты.

Но сначала закончим рассуждения о кубике Рубика. Заметим еще одну особенность нашей операции: для любого состояния однозначно определено «предыдущее» состояние. А именно, следует повернуть уже в другую сторону сначала вторую, а затем первую грань кубика. Посмотрим на рисунок 4 (с. 27). Двигаясь из положения A «назад», начиная с полученного первым положения A, через несколько шагов мы придем в положение E; значит, и из во второй раз полученного положения A за то же число шагов мы попадем в положение E. Таким образом, между первым и вторым положениями кубика A обязательно находится положение E — собранный кубик.

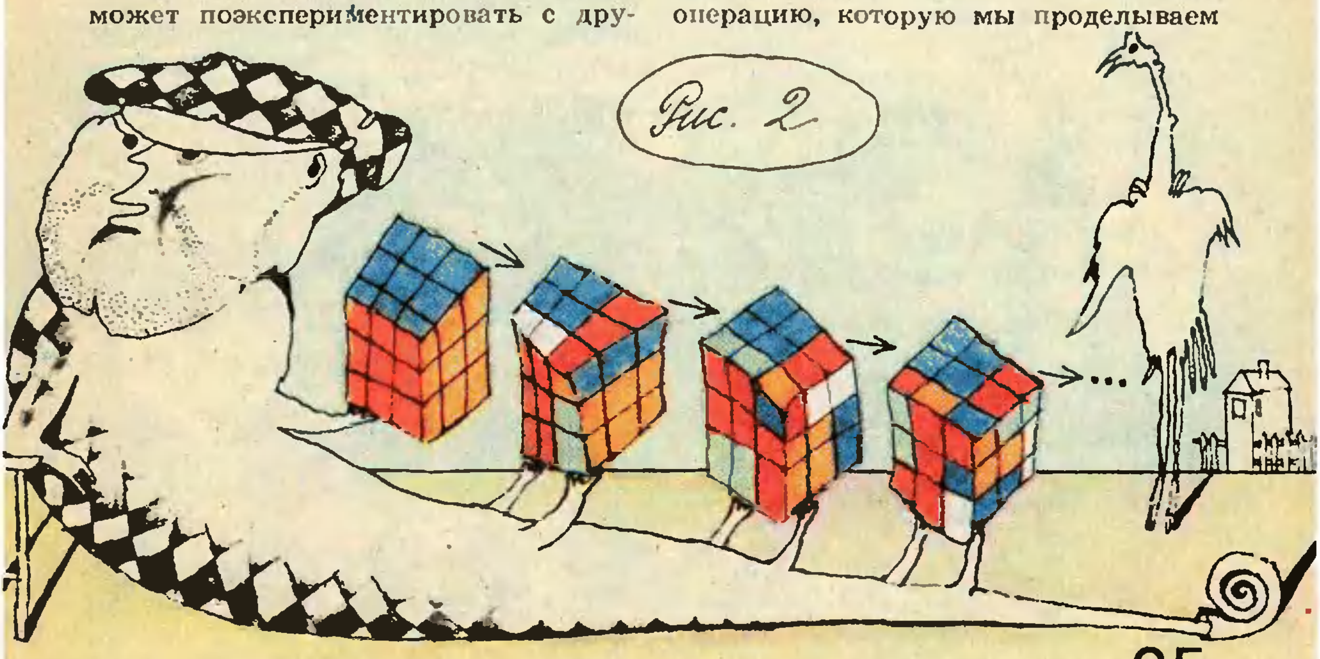
Вот такие рассуждения промелькнули в моей голове перед тем, как я начал вертеть кубик по описанному правилу. Конечно, количество пар вращений могло оказаться очень большим, ведь состояний у кубика Рубика чрезвычайно много — 43 252 003 274 489 856 000. Я пробовал вертеть грани в разные стороны — первую по часовой стрелке, а вторую — против. В этом случае возвращение наступает через 63 пары ходов, а если вертеть поочередно три соседние грани в одну сторону, то цикл замкнется через 80 троек поворотов.

Тот, кто имеет у себя кубик Рубика, может поэкспериментировать с другими наборами поворотов. Ну а кто его не имеет, берите бумагу, карандаш, и мы начнем экспериментировать с числами. Конечно, не помешал бы и микрокалькулятор или персональный компьютер, но можно обойтись и без них.

Разделим 136 на 11. Кстати, вы знаете признак делимости на 11? Нет? Запомните, это полезно. *Число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делится на 11.* В нашем случае $(1+6)-3=4$, следовательно, 136 на 11 не делится.

А что будет, если мы все-таки начнем делить уголком? Взгляните на рисунок 5 (с. 26). Нетрудно заметить, что цифры после запятой периодически повторяются. Такая десятичная дробь будет бесконечной и называется *периодической десятичной дробью.* Записывается она так: 12,(36) — повторяющийся набор цифр заключается в скобки.

При делении еще каких целых чисел возникают периодические десятичные дроби? Любых, лишь бы делитель был отличен от нуля, при этом мы будем считать конечную десятичную дробь бесконечной, продолжив ее после последней цифры нулями. Почему? Для доказательства нам будет очень удобно воспользоваться ранее сформулированным общим утверждением. В качестве рассматриваемого объекта возьмем разность, стоящую под чертой. В нашем примере это сначала будет 2, потом 4, потом 7, снова 4, снова 7 и т. д. Рассмотрим операцию, которую мы проделываем



с этим объектом. Сначала слева приписываем еще одну цифру, потом вычитаем из полученного числа наибольшее число, кратное делителю, но не превосходящее этого числа, записываем разность — это и будет преобразованное число.

Сначала операция зависит от делимого, поскольку приписываемая цифра зависит от делимого, но через несколько шагов (в нашем случае со второго шага) справа приписывается только нуль. После этого мы попадаем в условия действия сформулированного нами закона. Объект — число, оно может находиться в конечном числе состояний: принимать целые неотрицательные значения, меньшие делителя. Операция определена, она однозначно переводит одно число в другое. Значит, последовательность получаемых чисел будет периодически повторяться. Отсюда следует, что и цифры в частном начнут периодически повторяться. Наше утверждение доказано.

А что будет. если у числа взять сумму его цифр, у полученного числа снова взять сумму его цифр и т. д.? Скажем, для числа 1987 все ясно:

$$1987 \to 25 \to 7 \to 7 \to 7 \to \ldots$$

А для других чисел? Нетрудно заметить, что всякое число больше суммы своих цифр (исключение составляют лишь однозначные числа), поэтому после применения операции взятия суммы цифр число будет уменьшаться до тех пор, пока оно не станет однозначным, а однозначное число при нашей операции переходит в равное ему число. Таким образом мы получили доказательство периодичности (с периодом 1) получаемой последовательности, начиная с некоторого места.

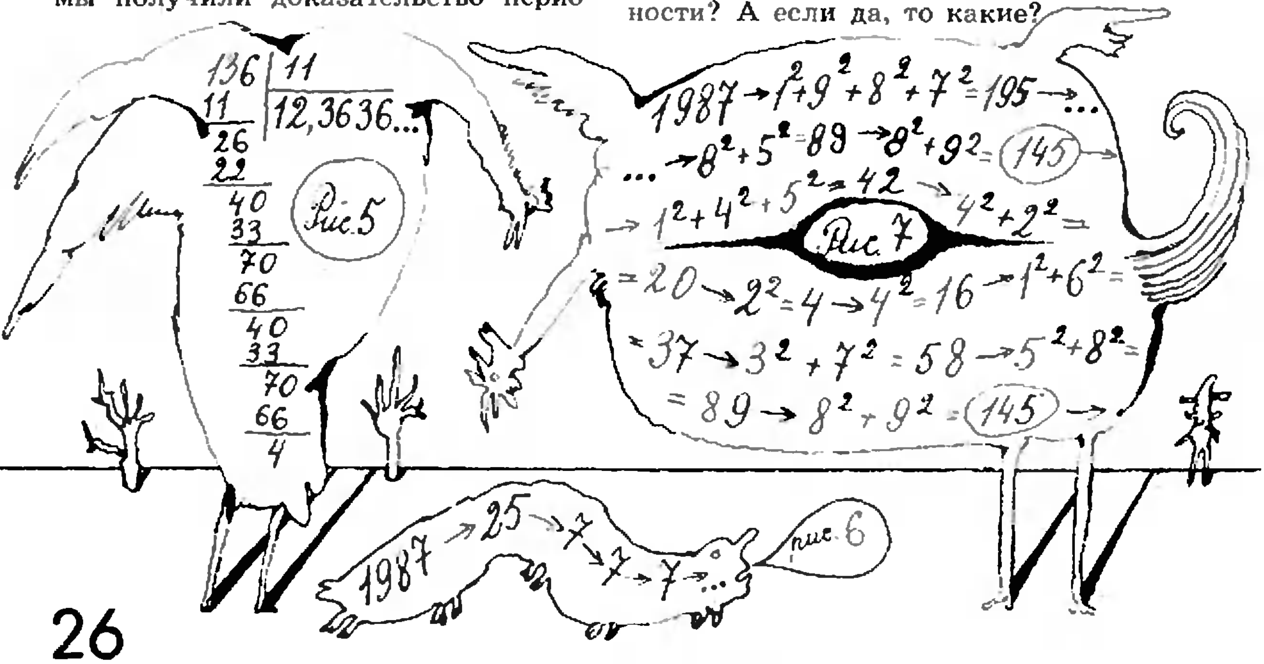
А какое число будет при этом повторяться? На этот вопрос легко ответить, не выписывая саму последовательность. Это будет *остаток от деления первоначального числа на 9, если само число не делится на 9, и 9, если оно делится на 9*. Почему? По признаку делимости на 9. Правда, вы знаете его в «урезанном» виде: «для того чтобы число делилось на 9, нужно, чтобы сумма его цифр делилась на 9». Однако имеет место более сильное утверждение: *само число и сумма его цифр имеют одинаковые остатки при делении на 9.*

Теперь ясно, что у каждого следующего числа будет тот же остаток при делении на 9, что и у начального. Среди однозначных чисел все имеют разные остатки при делении на 9, кроме 0 и 9, но у числа, отличного от нуля, сумма цифр также отлична от нуля. Отсюда и следует наше утверждение. Периодическую последовательность с периодом 1 называют последовательностью с *неподвижной точкой.*

А что будет, если у числа брать не сумму цифр, а сумму квадратов цифр? Снова попробуем для числа 1987 (рис. 7). Получили, что периодически будет повторяться последовательность 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89.

Возьмем число 133 (рис. 8). Здесь «неподвижная точка» — это 1 (период последовательности равен 1).

Но обязательно ли при процедуре взятия суммы квадратов цифр возникнут периодические последовательности? А если да, то какие?



Про введенную нами операцию — *взятие суммы квадратов цифр данного числа* — можно высказать два утверждения:

1. *Всякое число, меньшее 200, переходит в число, меньшее 200.*

2. *Всякое число, большее или равное 200* (и даже 100), *уменьшается при этой операции.*

Первое утверждение нетрудно проверить. Действительно, из чисел, меньших 200, наибольшую сумму квадратов цифр имеет число 199, но эта сумма квадратов для числа 199 равна 163, что меньше, чем 200; значит, и для остальных чисел, меньших 200, сумма квадратов цифр меньше 200.

Второе утверждение даже более очевидно, чем первое (стоит лишь испробовать несколько больших чисел, чтобы в него поверить); для любознательных мы приводим ниже строгое доказательство этого факта.

Пусть некоторое число $N=\overline{a_n...a_2a_1a_0}$ меньше суммы квадратов своих цифр:

$$a_n\cdot 10^n+...+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0<a_n^2+...+a_0^2.$$

Тогда

$$a_n(10^n-a_n)+...+a_2(10^2-a_2)+a_1(10-a_1)+\\+a_0(1-a_0)<0.$$

Но в этой сумме все числа, кроме последнего, неотрицательны, а последнее больше или равно $9(1-9)=-72$. Если хотя бы одна из цифр a_n с $n\geq 2$ была отлична от нуля ($1\leq a_n\leq 9$), то было бы

$$a_n(10^n-a_n)>10^n-9\geq 91,$$

и вся сумма была бы положительна. Таким образом, $n\leq 1$ и $N<100$.

Из утверждений 1, 2 и закона о периодичности вытекает, что операция взятия суммы квадратов цифр обязательно приводит к периодической последовательности.

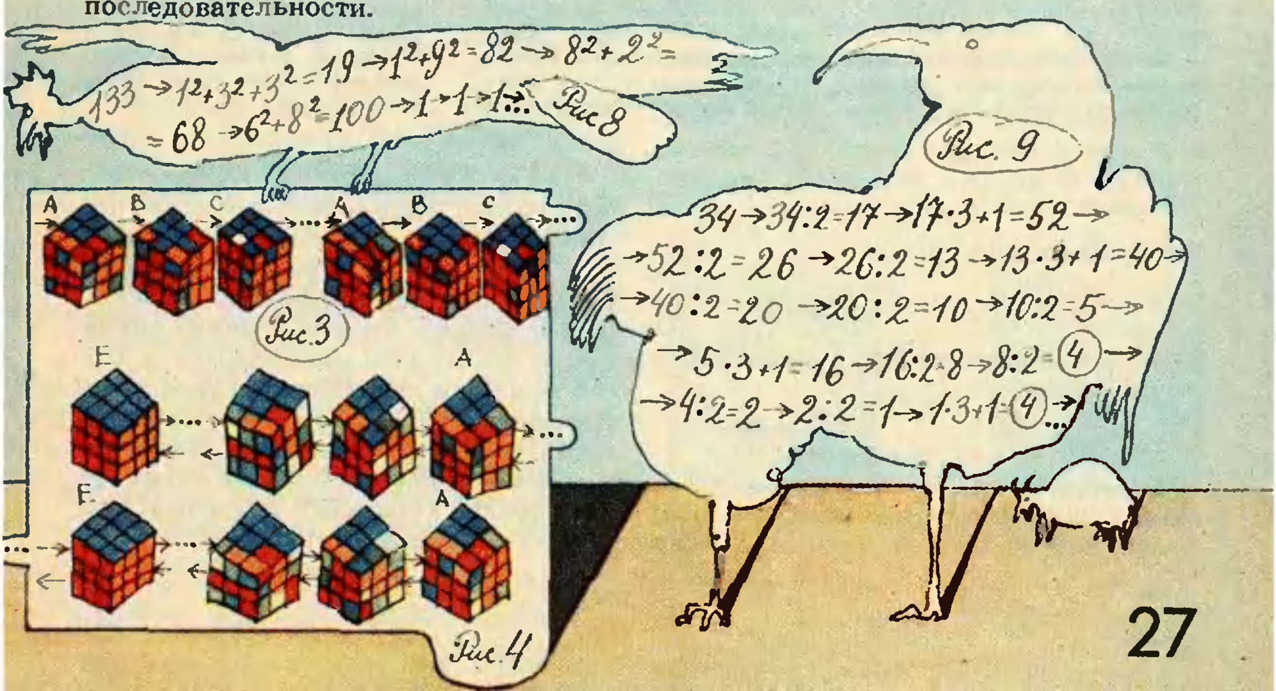
Осталось увидеть, какие же периодические последовательности будут при этом возникать. Оказывается, с какого бы числа мы ни начали, мы обязательно придем либо к последовательности 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, либо к 1. Проверьте это самостоятельно (в качестве начальных чисел достаточно рассмотреть лишь числа, меньшие 200 (почему?) и даже меньшие 161).

А что будет, если брать не сумму квадратов цифр, а сумму их кубов? Попробуйте с этой задачей разобраться самостоятельно.

В заключение расскажем об одной нерешенной проблеме. Возьмем какое-нибудь число. Если оно четное, то разделим его на 2. Если оно нечетное, то умножим его на 3 и прибавим 1. Снова: если полученное число N четное, то берем $N/2$, а если нечетное, то берем $3N+1$. И так далее. Для числа 34 этот процесс изображен на рисунке 9. Он заканчивается периодической последовательностью 4, 2, 1, 4, 2, 1,... с периодом 3.

Были испробованы в качестве начальных чисел очень многие числа, и все они приводили к такой *последовательности*. Однако никто до сих пор не доказал, что так будет всегда.

Мы не надеемся на то, что кто-то из читателей решит эту задачу. Попробуйте решить похожую задачу: *если число четное — делим его пополам, если — нечетное, то прибавляем 101.* (Решение этой задачи, а также задачи об операции взятия суммы кубов цифр числа см. в следующем номере.)



Наш календарь

На с. 32, 33 нарисованы двенадцать правильных пятиугольников. Пятиугольники окрашены в четыре цвета. Попробуйте склеить из них многогранник так, чтобы никакие соседние грани не были окрашены одинаково. Многогранник, все грани которого правильные пятиугольники, называется додекаэдр (додекаэдр в переводе с греческого означает двенадцатигранник).

Оказывается, раскрасить додекаэдр так, чтобы никакие соседние грани не были окрашены одинаково, меньше, чем четырьмя красками, нельзя. И существует всего два различных способа такой раскраски четырьмя красками.

Можно превратить додекаэдр в оригинальный календарь, расположив на его гранях стандартные таблицы чисел месяца по неделям. А мы на каждой грани, соответствующей своему месяцу, поместили портрет математика, родившегося в этом месяце. (При этом получается удачно: четыре краски отвечают четырем временам года!) Здесь мы даем краткие сведения о каждом из них. Наш выбор математиков был в большой степени случайным. Тем, кто не нашел среди них своих любимых математиков, советуем самостоятельно сделать такой додекаэдр (или несколько). Если их красиво оформить, они могут украсить и новогоднюю елку.

Н. Е. Жуковский. Русский математик и механик, основоположник современной аэродинамики, где применил методы теории функций комплексного переменного. «Дедушка русской авиации» — так называют его авиаторы.

М. В. Келдыш. Советский математик и механик, известен своими работами по дифференциальным уравнениям и прикладной математике. Его работы явились фундаментом многих расчетов в авиационной, атомной и космической технике.

Ж.-Б. Ж. Фурье. Французский математик и физик, один из основателей математической физики. Вывел уравнение теплопроводности и разработал методы его решения. Известны его работы по теории функций, статистике, а также в области египтологии.

К. Ф. Гаусс. Немецкий математик, астроном. Получил выдающиеся результаты во многих областях математики. Современники называли его «королем математики». В физике создал общую теорию магнетизма, явился создателем современной геодезии.

П. С. Александров. Советский математик, основатель советской топологической школы. Им развита теория размерности пространств, разработаны методы алгебраического исследования геометрических характеристик множеств и пространств.

А. М. Ляпунов. Русский математик и механик. Основные его работы посвящены теории устойчивости равновесия механических систем, их поведению вблизи положения равновесия; интересны его работы по математической физике.

Ф. В. Бессель. Немецкий математик и астроном. Проводил наблюдения за звездами и математическую обработку результатов наблюдений. Исследовал функции, впоследствии получившие его имя.

Н. Х. Абель. Норвежский математик. Доказал невозможность представления через радикалы решения алгебраического уравнения пятой степени. Изучал интегралы от алгебраических функций. Один из создателей теории эллиптических функций.

М. В. Остроградский. Русский математик и механик. Его имя носят важный метод интегрирования рациональных функций, формула перехода от интеграла по объему к интегралу по поверхности тела. Многие его работы посвящены прикладным вопросам.

Э. Галуа. Французский математик. Основоположник современной алгебры. Ввел в математику понятие группы, с помощью которого вывел условия разрешимости алгебраического уравнения в радикалах. Работы Галуа были поняты и продолжены лишь через полвека после его смерти.

М. А. Лаврентьев. Советский математик и механик. Математические работы относятся к теории функций комплексного переменного. Исследовал важные задачи гидродинамики, теории направленного взрыва.

С. Рамануджан. Индийский математик. Получил выдающиеся результаты в теории чисел, теории цепных дробей, теории расходящихся рядов. Занимался исследованиями по изучению распределения простых чисел среди натуральных.

(Начало см. на с. 10)

Вспоминая, что

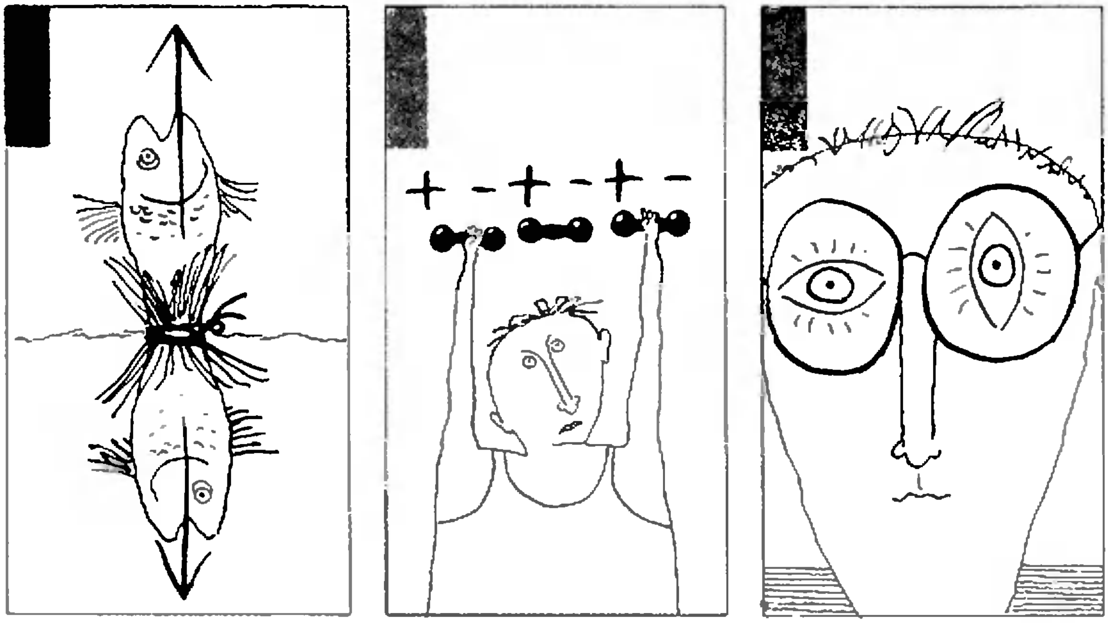
$$k = \frac{y}{x+4} = \frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x-4},$$

получаем окончательно (проделайте выкладки!)

$$J = \ln\left|\frac{x+4+\sqrt{x^2+3x-4}}{x+4-\sqrt{x^2+3x-4}}\right| + C.$$

Нетрудно понять, что метод, с помощью которого мы вычислили J, позволяет вычислять и многие другие интегралы. Советуем читателям продумать, какие именно.

В нашей статье одним и тем же методом решаются диофантовы уравнения и задачи интегрирования функций, т. е. задачи, относящиеся к совсем разным разделам математики. Дискретность Пифагора и непрерывность Архимеда оказались связанными. Мы не можем объяснить это иначе, как отослав читателя к эпиграфу, с которого начиналась эта статья.



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Закон Архимеда» предназначена восьмиклассникам, «Силы молекулярного взаимодействия» — девятиклассникам и десятиклассникам, «Поляризация света» — десятиклассникам.

Закон Архимеда

«...Удар сжатого воздуха хлопнул в трубах, вода в цистерне зажурчала, и глубомер пополз вверх. Лодка всплыла на ровном киле, и глубомер показал, что рубка уже вышла из воды», — так описывается всплытие подводной лодки в книге Л. Соболева «Морская душа».

Причина всплытия — сила Архимеда, называемая еще выталкивающей силой, которая после продувки цистерн с водой сжатым воздухом превысила по модулю силу тяжести лодки. Когда же и в каком случае возникает сила Архимеда? Со стороны чего она действует? Куда приложена, как направлена и чему равна?

Выталкивающая сила — это сумма всех сил давления, действующих со стороны жидкости или газа на поверхность погруженного в нее тела (рис. 1). Истинная причина появления выталкивающей силы — наличие различного гидростатического давления на разных уровнях жидкости.

Для нахождения силы Архимеда мысленно заменим погруженное тело жидкостью в объеме этого тела (рис. 2). На нее со стороны окружающей жидкости будет действовать такая же выталкивающая сила, как и на погруженное тело. По третьему закону Ньютона выделенная в объеме тела жидкость (вытесненная жидкость) будет действовать на окружающую жидкость с той же самой по модулю, но противоположно направленной силой. Это — вес вытесненного объема жидкости. Вспомним, что весом тела, неподвижного в некоторой системе отсчета (необязательно инерциальной), называется сила, с которой тело вследствие его притяжения к Земле действует на подставку или подвес. В нашем случае роль под-

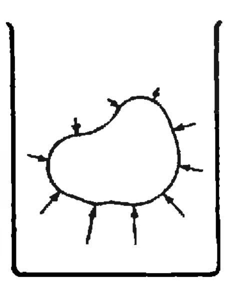


Рис. 1

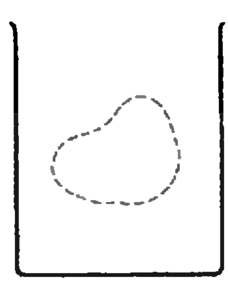


Рис. 2

ставки для выделенного объема жидкости играет окружающая жидкость.

Итак, выталкивающая сила, действующая на погруженное в жидкость тело, равна по модулю и противоположна по направлению весу вытесненной жидкости. Это и есть закон Архимеда. Заметим, что в формулировке закона говорится именно о весе вытесненной жидкости, а не о силе тяжести. И это весьма существенно, так как вес тела (по модулю) не всегда совпадает с силой тяжести. Например, ящик массой m в кабине поднимающегося с ускорением a лифта давит на пол с силой $m(g+a)$. Это значит, что вес ящика равен $P=m(g+a)$, в то время как сила тяжести, действующая на ящик, равна mg. Когда же кабина лифта опускается с тем же ускорением, вес ящика оказывается равным $P=m(g-a)$.

Из последнего выражения ясно, что выталкивающая сила появляется тогда, когда нет состояния невесомости, то есть любое тело (в том числе и жидкость) имеет вес. Если сосуд с жидкостью свободно падает, то жидкость находится в состоянии невесомости и на погруженное в нее тело сила Архимеда не действует. Не действует эта сила и в космическом корабле, движущемся с выключенными двигателями.

При доказательстве закона Архимеда мы считали, что тело полностью погружено в жидкость и вся его поверхность соприкасается с жидкостью. Если же часть поверхности тела плотно прилегает к стенке или дну сосуда, так, что между ними нет прослойки жидкости, то закон Архимеда неприменим. Яркой иллюстрацией сказанного служит опыт, когда ровную нижнюю поверхность деревянного кубика натирают парафином и плотно приставляют ко дну сосуда. Затем осторожно наливают воду. Брусок не всплывает, так как со стороны воды на него действует сила, не выталкивающая его вверх, а прижимающая ко дну (рис. 3).

Приведенная формулировка закона Архимеда остается справедливой и в случае, когда тело лишь частично опущено в жидкость, но не соприкасается со стенками сосуда. (Доказательство аналогично случаю полностью погруженного в жидкость тела.)

Нам осталось научиться находить вес вытесненной жидкости и линию действия выталкивающей силы. В общем случае (например, когда тело погружено в жидкость, вращающуюся вместе с сосудом) это не так легко сделать.

Рассмотрим наиболее простой и часто встречающийся на практике случай. Пусть сосуд с жидкостью неподвижен в некоторой инерциальной системе отсчета. Тогда, как известно, вес любого неподвижного тела равен силе тяжести, действующей на тело. Поэтому и выталкивающая сила равна по модулю силе тяжести, действующей на вытесненную жидкость, и противоположно ей направлена. Линия действия выталкивающей силы будет проходить через центр тяжести вытесненного объема жидкости. Покажем это.

На вытесненный объем жидкости массой m (рис. 4) действуют две силы — сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная в центре тяжести этого объема, и выталкивающая сила $\vec{F}_в$. Так как жидкость находится в равновесии, то по правилу рычага (см. § 62 «Физики 6-7» или § 47 «Физики 8») действующие на нее силы обратно пропорциональны плечам этих сил. Плечо силы тяжести относительно оси, проходящей через центр тяжести, равно нулю. Значит, и плечо выталкивающей силы тоже равно нулю, т. е. линия действия выталкивающей силы проходит через центр тяжести «вытесненного» объема жидкости.

Поскольку точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия, обычно выталкивающую силу помещают в центр тяжести вытесненной жидкости и называют эту точку также центром давлений.

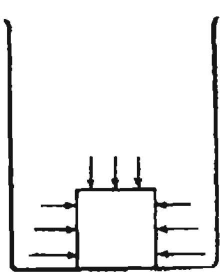


Рис. 3.

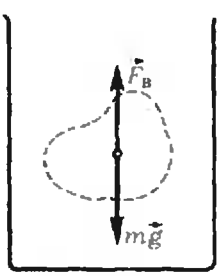


Рис. 4.

В. Н. Чивилёв

Силы молекулярного взаимодействия

Один из крупнейших современных физиков Ричард Фейнман считает, что если бы потребовалось в одной единственной фразе передать самое главное из того, что мы знаем сегодня о мире, то эта фраза должна была бы быть такой: «... все тела состоят из атомов — маленьких телец, которые находятся в беспрерывном движении, притягиваются на небольшом расстоянии, но отталкиваются, если одно из них плотнее прижать к другому» (Фейнмановские лекции по физике, том 1).

За каждым утверждением этой «ключевой» фразы — своя специальная наука. Что такое атомы? Как они устроены и как взаимодействуют друг с другом? Поиски ответов на эти вопросы приводят к квантовой физике, а через нее — к пониманию микромира. Какова роль движения атомов и их взаимодействия в формировании свойств вещества? В ответе на этот вопрос — вся макроскопическая физика и связанные с ней выходы на химию, биологию и другие науки.

Давайте и мы немного пройдем по этому пути и попытаемся, исходя из устройства отдельного атома, понять природу взаимодействия между различными атомами или молекулами.

Вы знаете («Физика 10», глава 11), что атомы состоят из положительно заряженного ядра и довольно сложным образом движущихся вокруг него отрицательных зарядов — электронов. Это столь привычное в наши дни представление об атомах привело в момент своего появления (в начале XX века) к настоящей катастрофе в классической физике. Дело в том, что в соответствии с классическими представлениями электрон при любом неравномерном движении и, в частности, при вращении вокруг ядра обязательно излучает электромагнитные волны. Энергия его при этом уменьшается, и, в конечном счете, он неизбежно должен упасть на ядро. Это означает, что в рамках классической физики атом вообще существовать не может.

Потребовался радикальный пересмотр всех наших представлений о мире, чтобы найти выход из создавшегося тупика. В результате была создана квантовая механика, которая, в частности, показала, что электрон в атоме может иметь лишь дискретные значения энергии. Находясь в состоянии с каким-либо значением энергии из этого «разрешенного» набора, электрон не излучает электромагнитные волны. Излучение (или поглощение) энергии происходит лишь при переходе из одного стационарного состояния в другое. Все сказанное относится и к молекулам.

Так было «оправдано» существование атомов и молекул.

Теперь естественно задать такой вопрос. Если атомы и молекулы нейтральны, то каким же образом они взаимодействуют друг с другом?

Давайте рассмотрим молекулу «поближе». Если центры распределения положительных и отрицательных зарядов внутри нее не совпадают друг с другом, то такую молекулу можно представить как небольшую гантельку («Физика 9», § 46). На одном конце ее находится положительный заряд, а на другом — отрицательный. Такие электрические гантельки называют диполями.*)

Когда две дипольные молекулы оказываются рядом, каждая из них стремится расположиться так, чтобы положительный конец одной был поближе к отрицательному концу другой, и наоборот. В результате, несмотря на то, что каждая молекула нейтральна, между молекулами возникает довольно заметное притяжение. Такое взаимодействие называется диполь-дипольным. Оно, как мы видели, связано с тем, что у дипольных молекул средние расстояния между разноименными зарядами немного меньше, чем между одноименными. Очевидно, что при удалении молекул друг от друга это различие в расстояниях уменьшается. В какой-то момент оно становится несущественным, и сила взаимодействия между молекулами обращается в ноль.

Ну, а как быть в тех случаях, когда молекулы «симметричны», т. е. центры распределения положительных и отрицательных зарядов внутри них совпадают?

(Продолжение см. на с. 34)

---

*) О том, какое электрическое поле создает диполь, рассказывалось в заметке «Электрический диполь и его электрический момент» («Квант», 1985, № 11, с. 21).

Многогранник — календарь

(см. с. 28)

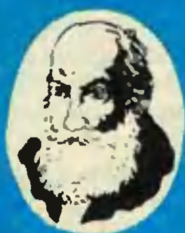
ДЕКАБРЬ

Сриниваза
РАМАНУДЖАН
(родился
22 декабря 1887 года)

МАРТ

Жан Батист Жозеф
ФУРЬЕ
(родился
21 марта 1768 года)

ЯНВАРЬ



Николай Егорович
ЖУКОВСКИЙ
(родился
17 января 1847 года).

АПРЕЛЬ

Карл Фридрих
ГАУСС
(родился
30 апреля 1777 года)

ФЕВРАЛЬ

Мстислав Всеволодович
КЕЛДЫШ
(родился
10 февраля 1911 года).

МАЙ

Павел Сергеевич
АЛЕКСАНДРОВ
(родился
4 мая 1896 года)

ИЮНЬ

Александр Михайлович
ЛЯПУНОВ
*(родился
6 июня 1857 года)*

ИЮЛЬ

Фридрих Вильгельм
БЕССЕЛЬ
*(родился
22 июля 1784 года)*

АВГУСТ

Нильс Хенрик
АБЕЛЬ
*(родился
5 августа 1802 года)*

СЕНТЯБРЬ

Михаил Васильевич
ОСТРОГРАДСКИЙ
*(родился
24 сентября 1801 года)*

ОКТЯБРЬ

Эварист
ГАЛУА
*(родился
26 октября 1811 года)*

НОЯБРЬ

Михаил Алексеевич
ЛАВРЕНТЬЕВ
*(родился
19 ноября 1900 года)*

Здесь надо прежде всего уточнить, что значит «совпадают». Ведь электроны непрерывно движутся вокруг ядра. Иногда говорят даже, что они «размазаны» вокруг ядра, образуя около него облако. И центр этого отрицательного облака совпадает с центром положительного ядра только в среднем, а в каждый отдельный момент времени они слегка отклонены друг от друга. Просто в один момент центр облака находится по одну сторону от центра положительного заряда, а в другой — по другую. Можно сказать, что в этом случае молекула (или атом) представляет собой непрерывно возникающий и исчезающий диполь.

Если две такие молекулы сближаются на достаточно малое расстояние, то эти «мерцающие» диполи начинают действовать друг на друга так, что в каждый момент времени разноименные заряды в различных молекулах оказываются друг к другу ближе, чем одноименные. Возникают силы притяжения, которые теперь называются ван-дер-ваальсовскими. Эти силы оказываются значительно слабее диполь-дипольных.

Итак, мы получили, что при сближении атомов или молекул между ними возникают силы притяжения.

Что же произойдет, если атомы или молекулы сближать все больше и больше? Понятно, что всегда наступит такой момент, когда электронные оболочки различных атомов начнут перекрываться. В результате между атомами возникнут силы отталкивания, обусловленные их «деформацией». Силы отталкивания гораздо больше диполь-дипольных и тем более ван-дер-ваальсовских сил притяжения, поэтому на малых расстояниях атомы всегда отталкиваются.

Притяжение на больших расстояниях и отталкивание на малых означает, что существует некоторое промежуточное расстояние, на котором силы притяжения и отталкивания компенсируются. Этот характерный размер и определяет среднее расстояние между молекулами в жидкостях и твердых телах (в газах молекулы практически не взаимодействуют друг с другом).

Само существование различных агрегатных состояний вещества (газообразного, жидкого и твердого) связано с описанным здесь взаимодействием. Правда для характеристики свойств систем из большого числа частиц (какой и является вещество) лучше пользоваться понятием не силы, а энергии взаимодействия. Так, если кинетическая энергия молекулы много больше энергии ее взаимодействия со своим окружением, мы имеем газ; если много меньше — твердое тело. В жидкости эти энергии приблизительно равны друг другу.

Е. Е. Городецкий

Поляризация света

Возвращавшиеся из Исландии моряки часто привозили необычные прозрачные камни — кристаллы известкового шпата. Эти камни, позже их стали называть исландским шпатом, были весьма замечательны по своей форме и другим свойствам, но главным образом — своими особенностями преломления света. Так, например, если кусок исландского шпата положить на какую-нибудь надпись, то сквозь него можно увидеть надпись раздвоенной (рис. 1).

В 1669 году датский ученый Э. Бартолин сообщил интересные результаты своих опытов с этими кристаллами. Оказалось, что при прохождении сквозь такой кристалл луч света расщепляется на два — теперь их называют обыкновенным и необыкновенным лучами. Названия лучей оправданы: обыкновенный луч ведет себя так, как это соответствует известным законам преломления света, а необыкновенный луч как бы нарушает эти законы. В частности, когда падающий луч перпендикулярен поверхности кристалла, первый луч проходит сквозь кристалл непреломленным, второй же испытывает преломление (рис. 2).

Бартолин провел тщательные исследования открытого им явления двойного лучепреломления и обнаружил дополнительно, что в кристалле существует некоторое направление, вдоль которого падающий луч не раз-

Рис. 1

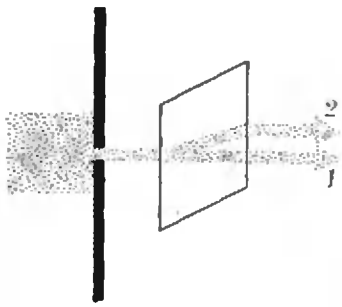


Рис. 2.

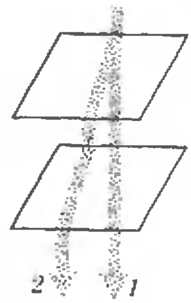


Рис. 3.

дваивается. Однако объяснения всем этим фактам он найти не смог.

Несколько лет спустя открытие Бартолина привлекло к себе внимание нидерландского ученого Х. Гюйгенса. Повторив опыты Бартолина, он идет дальше, пропуская оба луча, вышедшие из кристалла исландского шпата, сквозь второй точно такой же кристалл. Для объяснения результатов опытов Гюйгенс вводит понятие оптической оси кристалла (которую фактически уже обнаружил ранее Бартолин). Ею он называет выделенное направление в кристалле, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются не разделяясь.

Опыты Гюйгенса показали, что в случае, когда оптические оси обоих кристаллов параллельны и луч света падает под прямым углом к передней грани первого кристалла, то при входе во второй кристалл обыкновенный и необыкновенный лучи не претерпевают разделения на два (рис. 3). В других случаях оба луча, вышедшие из первого кристалла, во втором кристалле опять могут разделиться. При этом интенсивность каждого из четырех лучей в сильной степени зависит от угла между оптическими осями кристаллов.

Анализируя результаты опытов, Гюйгенс, придерживавшийся волновой теории света, пришел к выводу, что обыкновенному и необыкновенному лучам соответствуют различные скорости распространения в исследуемом кристалле. Однако Гюйгенс исходил из аналогии между звуковыми и световыми волнами и считал последние, как и первые, продольными. Это заблуждение не позволило ему объяснить некоторые особенности проведенных опытов.

Спустя более чем сто лет, в 1808 году, французский физик Э. Малюс обнаружил двойное лучепреломление при отражении света. Глядя сквозь кристалл исландского шпата на отражение заходящего солнца в окнах Люксембургского дворца в Париже, Малюс к своему удивлению заметил, что два изображения, возникающих в результате двойного лучепреломления, имели различную яркость. В частности, при некотором положении кристалла было видно только одно изображение.

На основании этого и других опытов и опираясь на корпускулярную теорию света Ньютона, Малюс предположил, что корпускулы, которые, по Ньютону, имеют внешнее сходство с магнитиками, обладающими полюсами, в солнечном свете ориентированы беспорядочно, но после отражения от какой-либо поверхности или после прохождения сквозь кристалл они приобретают определенную ориентацию. Такой «упорядоченный» свет он назвал поляризованным.

Сегодня нам хорошо известно, что видимый свет представляет собой поперечные электромагнитные волны. При распространении электромагнитной волны в пространстве в нем совершают колебания вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ и вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$. Эти векторы всегда взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Свет, в котором направления колебаний упорядочены каким-либо образом, называют поляризованным. Если колебания вектора $\vec{E}$ все время происходят в одной плоскости, то говорят, что свет плоскополяризованный (или линейно поляризованный), а саму эту плоскость называют плоскостью поляризации.

Свет, излученный одним атомом, поляризован всегда. Однако излучение макроскопического тела (Солнца, электрической лампочки и т. п.) является суммой излучений огромного числа атомов. Каждый из них излучает световую волну на протяжении примерно 10^{-8} с, и если все атомы будут излучать свет с различной поляризацией, то поляризация всего пучка будет меняться на протяжении таких же промежутков времени. Поэтому в естественном свете все эффекты, связанные с поляризацией, усредняются, и такой свет называют неполяризованным. Для выделения из неполяризованного света «части», обладающей желаемой поляризацией, используют так называемые поляризаторы. В их роли может выступать тот же кристалл исландского шпата, из которого обыкновенный и необыкновенный лучи выходят плоскополяризованными во взаимно перпендикулярных плоскостях, а также искусственные поляризаторы.

Разберем принцип действия этого прибора на известном вам примере поляризатора для электромагнитных волн сантиметрового диапазона (см. «Физику 10», § 47). Он выполнен в виде ряда параллельных металлических прутьев, сделанных из хорошего проводника. При падении на решетку электромагнитной волны (с длиной, сравнимой с расстоянием между прутьями) составляющая электрического поля, параллельная прутьям, сильно затухает, так как под ее воздействием в прутьях возникает электрический ток, что приводит к потерям энергии на джоулево тепло. Кроме того, происходит частичное отражение волны от решетки. В результате параллельная составляющая волны через решетку фактически не проходит. Перпендикулярная же прутьям составляющая электрического поля проходит через такой поляризатор, практически не затухая.

В 1932 году группа американских ученых изобрела оптический поляризатор, который оказывает на световые волны действие, аналогичное описанному выше. Для изготовления такого поляризатора было выбрано вещество, состоящее из длинных углеводородных цепей. Затем его растянули, чтобы молекулы выстроились вдоль направления растяжения, и опустили в раствор йода. Молекулы йода «прикрепились» к углеводородным цепям и отдали им электроны, свободно перемещающиеся вдоль нитей. Образовалась как бы та же «проволочная ограда». При падении электромагнитной волны ее составляющая, параллельная нитям, затухает, так как полю приходится совершать работу (разгоняя электроны вдоль нитей). Поскольку «ограда» оказывается достаточно «частой» даже для световых волн (длины которых составляют доли микрометра), такой поляризатор поглощает свет, поляризованный параллельно нитям, и пропускает излучение, поляризованное перпендикулярно ориентации нитей.

В заключение предлагаем вам самостоятельно объяснить описанные раньше опыты по двойному лучепреломлению света.

А. А. Варламов

Несколько задач на один прием

Предлагаем вам несколько задач на построение с помощью преобразований плоскости — поворотов, параллельных переносов, осевых симметрий, гомотетий. Способ применения преобразований во всех задачах один и тот же. Мы проиллюстрируем его примером.

Даны две окружности ω_1 и ω_2 и точка A. Требуется построить отрезок с концами на данных окружностях, который бы делился точкой A пополам.

Решение. Пусть X и Y — концы искомого отрезка, принадлежащие соответственно ω_1 и ω_2. При центральной симметрии с центром A точка Y должна перейти в X, т. е. попасть на окружность ω_1. В то же время она должна оказаться на окружности ω_2', симметричной ω_2 относительно A (так как $Y \in \omega_2$). Следовательно, X — точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2'. Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

Подумайте какие преобразования надо применить в следующих задачах:

1. Дана прямая и две окружности по разные стороны от нее. Постройте квадрат, диагональ которого лежит на прямой, а концы другой диагонали — на окружностях.

2. Даны три параллельные прямые. Постройте правильный треугольник, вершины которого лежат (по одной) на этих прямых.

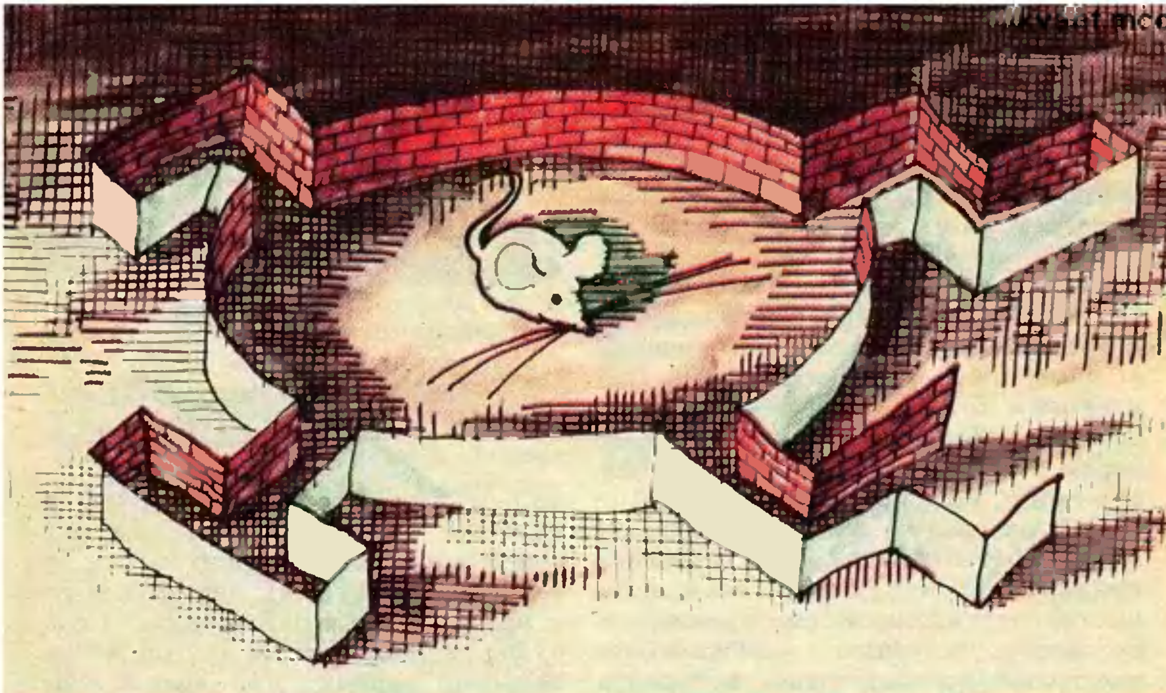
3. Даны окружность и точка A вне нее. Постройте луч с началом в A, пересекающий окружность последовательно в точках B и C таких, что $AB=BC$.

4. Даны точка A, окружность и прямая. Постройте квадрат $ABCD$ такой, что на окружности лежит его вершина B, а на прямой а) вершина D, б) вершина C.

5. Даны две пересекающиеся прямые и две точки, A и B. Постройте параллелограмм $ABCD$, вершины C и D которого лежат (по одной) на данных прямых.

6. Даны две концентрические окружности. Проведите в большей окружности хорду, которая бы делилась меньшей окружностью на три равные части.

Д. В.



Математический кружок

Выбор наилучшего варианта

Кандидат физико-математических наук
В. Л. ГУТЕНМАХЕР,
Ж. М. РАББОТ

В младших классах, а также на вступительных экзаменах в вузы, часто предлагают задачи на составление уравнений. При этом приходится, во-первых, заниматься переводом условия с обычного языка на математический, а во-вторых, решать полученные уравнения и неравенства. В тексте задачи описана какая-нибудь ситуация и требуется по одним указанным данным определить другие. Вот, например, первые и последние фразы условий задач из учебника алгебры для 7 класса:

«Две машинистки получили для перепечатки рукопись... За сколько часов могла бы перепечатать рукопись каждая машинистка?»

«Катер отправился от речного вокзала вниз по течению... Сколько времени затратил велосипедист на пути от города до турбазы?»

«Сплав меди с цинком, содержащий 5 кг цинка, сплавлен с 15 кг цинка... Какова была первоначальная масса сплава?»

Важно уметь решать такие задачи, так как в производственной и экономической практике часто приходится подводить итоги, пересчитывать и суммировать различные показатели, анализировать работу предприятий и т. п. Результатом этой деятельности является уяснение сложившейся ситуации. После этого естественно сделать следующий шаг — составить план-программу дальнейших действий. Здесь, конечно, возникает множество вариантов и хочется выбрать из них н а и л у ч ш и й.

Постановка и решение таких задач являются предметом *математического программирования*. Одним из первых, кто использовал математику в подобных вопросах, был советский математик, академик Л. В. Канторович (1912—1986). В 1939 г. вышла его книга «Математические методы организации и планирования производства». Во введении к этой книге он писал:

«Существуют два пути повышения эффективности работы цеха, предприятия и целой отрасли промышленности. Один путь — это различные улучшения в технике, то есть новые приспособления в отдельном станке, изменение технологического процесса, нахождение новых, лучших видов сырья. Другой путь, пока гораздо меньше используемый,— это улучшения в организации производства и планирования. Сюда относятся, например, такие вопросы, как распределение работ между отдельными станками предприятия или механизмами, правильное распределение заказов по предприятиям, правильное распределение различных видов сырья, топлива и пр.»

С тех пор прошло много лет, и математическое программирование стало целой наукой, основанной на экономико-математических методах и широко использующей ЭВМ.

В реальных задачах планирования и управления приходится иметь дело одновременно с очень большим количеством переменных. Мы разберем несколько простых учебных примеров с небольшим числом переменных, в которых можно получить решения с помощью математики, известной ученикам 6-7 классов,— пропорций, свойств линейной функции одного переменного, небольшого перебора вариантов и, конечно, смекалки.

Где построить баню? *В деревне Мочалкино 100 жителей, а в деревне Веники — 50 жителей. В каком месте шоссе, соединяющего эти деревни, надо построить баню, чтобы общее расстояние, которое придется пройти по шоссе всем 150 жителям до бани, было наименьшим?*

Переведем условие задачи на математический язык. Пусть расстояние по шоссе между деревнями равно a км и баня находится между деревнями в x км от Мочалкино, тем самым $0 \leqslant x \leqslant a$. Тогда все 100 жителей этой деревни пройдут до бани $100x$ км, а все 50 жителей деревни Веники — $50(a-x)$ км. Всего будет пройдено $S=100x+50(a-x)$ км.

Итак, мы получили следующую математическую задачу: *найти наименьшее значение величины $S=50x+50a$ при условии, что $0 \leqslant x \leqslant a$, где a — фиксированное число.*

Решить задачу очень легко: достаточно заметить, что величина S уменьшается с уменьшением x, поэтому наименьшее значение S будет при наименьшем возможном значении x, то есть при $x=0$, и тем самым *строить баню нужно в деревне Мочалкино.*

Обсудим полученный результат. Почти все, кому мы задавали вопрос, где построить баню, сразу отвечали, что ее надо построить в месте, расстояние от которого до деревни Мочалкино в два раза меньше расстояния до деревни Веники. Наверное, у них возникла такая физическая модель: представляются качели, на одном конце доски сидит человек, в два раза более тяжелый, чем сидящий на другом конце.

Если баня будет находиться на расстоянии $a/3$ от Мочалкино, то все ее жители вместе пройдут до бани такой же путь, что и жители Веников:

$100 \cdot a/3=50 \cdot 2a/3$. Наверное, это кажется более справедливым, если иметь в виду не всех жителей, а противопоставлять одну деревню другой и искать «точку равновесия». Но это будет решение совсем другой математической задачи: *при каком значении x, где $0 \leqslant x \leqslant a$, величина $f=|100x-50(a-x)|$ будет наименьшей?*

Конечно, слова «наилучший вариант» могут пониматься совершенно по-разному. Чтобы внести в них точный смысл, мы составляем *целевую функцию.* В нашей задаче это была функция $S=50x+50a$, а в другом варианте — функция $f=|150x-50a|$. Найдя x, при котором целевая функция принимает наименьшее значение, мы получили наилучший (с определенной точки зрения) вариант.

Ясно, что жители деревни Веники могут оказаться не в восторге ни от одного из этих вариантов и, возможно, смогут выдвинуть против них довольно веские аргументы. Скажем, что стариков и детей у них больше, а машин — меньше, чем в Мочалкино, что у них есть водопровод, а в Мочалкино — нет и т. п. Но если все это учесть, то получится совсем другая математическая задача — другая *математическая модель.*

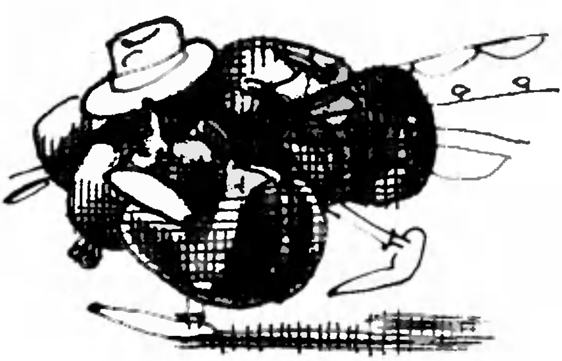
Мы надеемся, что несколько легкомысленный сюжет задачи про баню не создаст у читателей неверного впечатления. Вот похожие, но уже вполне серьезные задачи: *где на территории большого завода с несколькими цехами разместить столовую? Как лучше спланировать в ней обслуживание рабочих?*

Здесь выбор целевой функции в принципе ясен (наименьшая затрата времени), но оптимальное решение зависит не только от числа рабочих в разных цехах, но и от особенностей производства и других факторов.

Лучший способ добраться до вокзала. *Петру Петровичу надо срочно добраться до вокзала. Он может вызвать такси, которое придется ждать 24 минуты, и ехать со скоростью 30 км/ч, а может идти пешком со скоростью 6 км/ч. Как ему лучше поступить, если расстояние от дома до вокзала: а) 2 км; б) 3 км; в) 5 км?*

Чтобы нагляднее сравнить движение пешехода и автомобиля, мы введем еще один персонаж — жену Петра Петровича.

Представим себе, что Петр Петрович пошел на вокзал пешком, но как только он вышел из дома, его жена заметила, что он забыл дома железнодорожный билет, тут же вызвала такси, дождалась его и поехала догонять мужа.



Подсчитаем время, через которое она его догонит. Через время t после своего выхода из дома Петр Петрович будет находиться на расстоянии $6t$ км от дома, а при $t>24$ мин$=2/5$ ч такси пройдет $30(t-2/5)$ км.

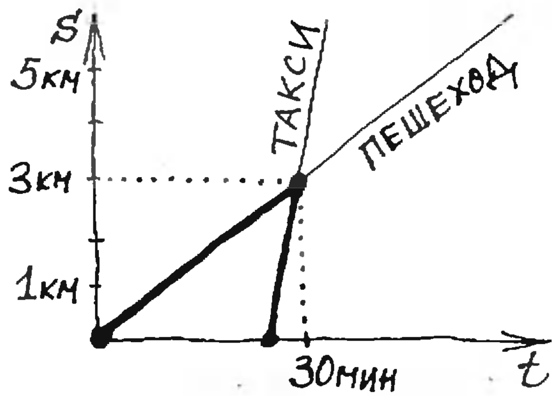
Такси может догнать Петра Петровича в момент, когда

$$6t=30(t-2/5),$$

то есть при $t=1/2$ ч. Если до вокзала меньше, чем $1/2$ ч хода, жена не успеет догнать мужа, если же больше, чем $1/2$ ч, то она его догонит и подвезет на вокзал. За $t=1/2$ ч Петр Петрович может удалиться от дома на 3 км. В результате этих рассуждений мы приходим к следующему выводу.

Если расстояние до вокзала меньше 3 км, как в случае *а*), Петру Петровичу лучше идти пешком; если равно 3 км, то все равно — пешком или на такси; а если больше 3 км, как в случае *в*) — лучше вызвать такси.

Для лучшего понимания решение полезно представить графически



В нашем решении молчаливо сделан ряд предположений: пешеход и такси движутся равномерно, вызов и выезд такси происходит мгновенно (на практике это далеко не так) и т. п. Кроме того, по нашему условию для Петра Петровича самым ценным было время. Но в случае *б*) мы столкнулись с тем, что нашлось два равноценных с этой точки зрения варианта. Для выбора одного из них нужно другое соображение: или стоимость поездки (тогда он, скорее всего, пойдет пешком), или удобства (тогда он поедет на такси).

Один велосипед на двоих. *Два брата, Коля и Сережа, хотят добраться до бабушки, живущей от них в 40 км. У них есть один велосипед, на который они погрузили вещи. Коля ходит пешком со скоростью 6 км/ч, а ездит на велосипеде со скоростью 20 км/ч; скорости Серёжи — соответственно 4 км/ч и 30 км/ч. Велосипед можно оставлять на дороге без присмотра. Как им вместе быстрее всего добраться до бабушки?*

Предположим, что братья прибывают к бабушке одновременно, и найдем время, за которое они могут это сделать. Затем мы покажем, что за меньшее время один из них не сможет добраться до бабушки.

Пусть Коля x км проехал на велосипеде и $(40-x)$ км прошел пешком, а Сережа, наоборот, прошел x км, а проехал $(40-x)$ км.

Тогда Коля затратил на дорогу $(x/20+(40-x)/6)$ часов, а Сережа — $(x/4+(40-x)/30)$ часов.

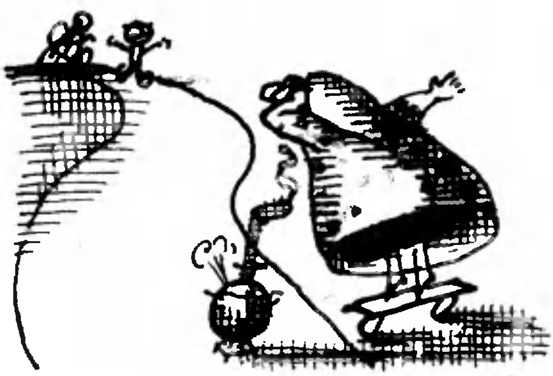
Если они прибыли одновременно,

$$\frac{x}{20}+\frac{40-x}{6}=\frac{x}{4}+\frac{40-x}{30}.$$

Отсюда получается, что $x=16$ км, а добрались они оба за $4\frac{4}{5}$ часа.

Такой вариант возможен, если, например, Коля выезжает из дома на велосипеде, едет 16 км, оставляет велосипед на дороге и дальше идет пешком, а Сережа идет до велосипеда, садится на него и едет до бабушки.

Убедимся в том, что за меньшее время один из них не смог бы добраться до бабушки. Действительно, если Коля проедет на велосипеде на сколько-то километров меньше, чем 16, то эти километры ему придется идти пешком и он затратит на них больше времени, чем в первоначальном варианте. Если же Коля проедет на сколько-то километров больше, чем 16, то тогда Сережа вынужден будет пройти пешком эти километры и позже приедет к бабушке.



При решении этой задачи самые простые практические соображения привели нас к оптимальному варианту: братья должны доставить велосипед к бабушке и, главное, они должны появиться у нее одновременно. Естественно, что если при этом братья не будут отдыхать, они прибудут к бабушке за самое короткое время.

Здесь мы снова встречаемся с возможностью выбора: на самом деле существует даже бесконечное число вариантов, обеспечивающих наименьшее время путешествия — они много раз могут оставлять другу другу велосипед, лишь бы Коля прошел пешком 16 км, а Сережа — 24 км. Какой вариант лучше — судите сами.

Поменьше меди. *В лабораторию привезли три сплава. Первый содержит 40 % меди и 60 % никеля, второй — 60 % меди и 40 % кобальта, третий — 60 % кобальта и 40 % никеля. Для эксперимента понадобился 1 кг нового сплава, который содержал бы 40 % кобальта и как можно меньше меди (см. таблицу). Как его изготовить?*

	Cu	Ni	Co
I	40%	60%	—
II	60%	—	40%
III	—	40%	60%

Составим математическую модель задачи. Возьмем x кг первого сплава, y кг второго и z кг третьего.

По условию $x+y+z=1$. Кобальта в новом сплаве будет $0{,}4y+0{,}6z$. Опять-таки по условию $0{,}4y+0{,}6z=0{,}4$. Меди в новом сплаве окажется $0{,}4x+0{,}6y$.

Итак, модель построена: *требуется найти неотрицательные числа x, y и z, которые удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ 0{,}4y+0{,}6z=0{,}4 \end{cases}$$

и при которых величина $m=0{,}4x+0{,}6y$ принимает наименьшее значение.

С помощью системы уравнений выразим x и z через y и подставим их значения в выражение для величины m, затем найдем наименьшее значение полученной функции от y (учитывая, конечно, что все переменные x, y и z должны быть неотрицательными).

Из второго уравнения

$$z=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}y.$$

Подставим это значение z в первое уравнение:

$$x=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}y.$$

Поэтому $m=\frac{2}{15}+\frac{7}{15}y.$

Мы видим, что величина m тем меньше, чем меньше значение y. Но наименьшее возможное значение y равно 0. Тогда $m=2/15$, при этом $x=1/3$, $z=2/3$, то есть *надо смешать 1/3 кг первого сплава с 2/3 кг третьего, а второй сплав вообще не трогать.*

Заметим, что здесь нам опять встретилась линейная функция

$$m=\frac{2}{15}+\frac{7}{15}y,$$

которая принимает наименьшее значение при наименьшем возможном значении $y=0$. Если бы мы выражали m не через y, а через x или через z, то было бы сложнее выяснить, на каком промежутке надо искать ее наименьшее значение. Как лучше выбирать, к какой переменной сводить функцию — это тоже важная задача.

Можно было бы обойтись без этих выкладок, если подметить следующее обстоятельство. Чтобы новый сплав содержал 40 % кобальта и как можно меньше меди, надо, чтобы в нем было как можно больше никеля. Поэтому второй сплав, который, казалось бы, хорош тем, что в нем уже 40 % кобальта, лучше вообще не трогать, так как в нем совсем нет никеля — см. таблицу. Значит, надо смешать первый и третий сплавы. Пусть мы взяли a кг первого сплава, тогда надо взять $(1-a)$ кг третьего. В новом сплаве будет содержаться $0{,}6(1-a)$ кг кобальта. По условию $0{,}6(1-a)=0{,}4$, поэтому $a=1/3$, что приводит к ответу.

Новогодняя задача*). *На 100 руб. решено купить елочных игрушек. Елочные игрушки продаются наборами. Набор, состоящий из 20 игрушек, стоит 4 руб., набор, состоящий из 35 игрушек, стоит 6 руб., набор, состоящий из 50 игрушек, стоит 9 рублей. Сколько и каких наборов нужно купить, чтобы было куплено наибольшее количество игрушек?*

Одна игрушка в первом наборе стоит 1/5 руб., во втором наборе — 6/35 руб., в третьем наборе — 9/50 руб. Упорядочим эти числа: $6/35<9/50<1/5$. Итак, самые дешевые игрушки во втором наборе, а самые дорогие — в первом.

I	II	III
20шт	35шт	50шт
4руб	6руб	9руб

I	II	III
1шт	1шт	1шт
$\frac{1}{5}$руб	$\frac{6}{35}$руб	$\frac{9}{50}$руб

Чтобы купить на 100 руб. как можно больше игрушек, нужно, конечно, купить побольше дешевых игрушек. Самое большое, мы можем купить 16 наборов по 6 руб. и затратить на это 96 руб.

Остаются 4 руб., на которые можно лишь купить первый набор. Всего мы купим таким способом $16\cdot35+20=580$ игрушек.

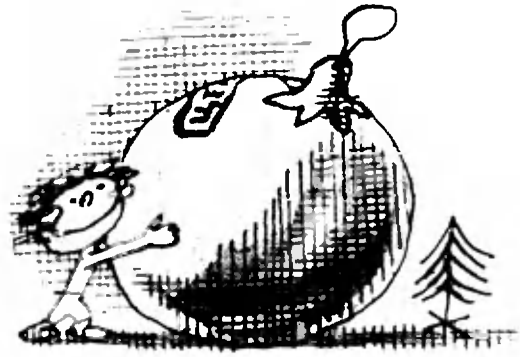
Скорее всего, это самый лучший вариант. Проверим все-таки еще такой: если купить 15 шестирублевых наборов, то остается 10 руб. Мы можем тогда купить еще один девятирублевый набор или два четырехрублевых. И в том, и в другом случае количество игрушек оказывается меньше, чем в первом варианте.

Итак, надо купить 16 наборов по 6 руб. и 1 набор за 4 руб. При этом будет закуплено 580 игрушек.

Мы пришли к этому ответу с помощью такого естественного соображения: можно купить тем больше игрушек, чем они дешевле.

Наши рассуждения правдоподобны, но, вообще говоря, мы перебрали не все возможные варианты. Поэтому приведем более строгое решение.

Пусть x — количество наборов I типа, y — II типа, z — III типа. Надо найти такие неотрицательные



*) Эта задача предлагалась на вступительном экзамене на отделении экономической кибернетики экономического факультета МГУ в 1968 г.

числа x, y и z, чтобы выполнялись условия $4x+6y+9z\leqslant 100$ и чтобы величина $S=20x+35y+50z$ была наибольшей.

Поскольку

$$4x+6y+9z=\frac{6}{35}S+\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}z\geqslant\frac{6}{35}S,$$

получается, что $\frac{6}{35}S\leqslant 100$, откуда $S\leqslant 583\frac{1}{3}$.

Так как $S=20x+35y+50z$ — целое число, делящееся на 5, имеем $S\leqslant 580$. При $x=1$, $y=16$, $z=0$ все условия выполняются и $S=580$.

Эта задача относится к *целочисленному программированию*, которое является одним из наиболее сложных разделов математического программирования.

Задачи

1. Трех молодых продавцов — Юрия, Якова и Льва — распределили на работу в универмаг. Директору универмага нужно направить одного из них в отдел радиотоваров, другого — в отдел музыкальных инструментов, а третьего — в отдел фототоваров. Директор попросил психолога помочь ему провести это назначение наилучшим образом. Психолог провел с ними беседу и оценил знания каждого

	РАДИО	ФОТО	МУЗЫКА
Юрий	5	4	7
Яков	6	7	3
Лев	8	11	2

во всех трех областях в баллах. Затем он составил таблицу и представил ее директору универмага. Как директору распределить новичков, чтобы сумма соответствующих баллов была наибольшей? (Например, если Юрия назначить в радиоотдел, Якова — в музыкальный, а Льва — в фотоотдел, то сумма баллов будет равна $5+3+11=19$.)

2. На сковородке, вмещающей две котлеты, можно их поджарить с обеих сторон за 10 минут. Как быстрее всего поджарить на этой сковородке 3 котлеты?

3. Даны две точки, A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой. Как расположить на этой прямой отрезок MK данной длины a, чтобы ломаная $AMKB$ имела наименьшую длину?

4. Три брата купили один велосипед, и им нужно добраться до дома, находящегося в 30 км от магазина. Каждый из братьев ходит пешком со скоростью 4 км/ч, а ездит на велосипеде со скоростью 20 км/ч. За какое наименьшее время они могут добраться до дома? (Велосипед можно оставлять на дороге без присмотра.)

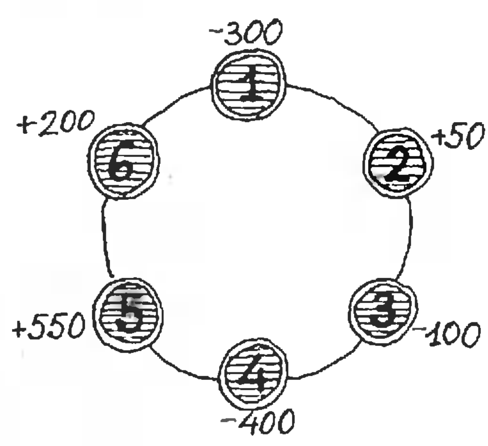
5*). Малыш может съесть торт за 10 мин, банку варенья — за 8 мин и выпить пакет молока за 4 мин. Карлсон может это сделать соответственно в 2 раза быстрее. За какое наименьшее время они могут вместе покончить с завтраком, состоящим из торта, банки варенья и пакета молока?

6. В каждом из четырех сосудов содержится по 1 л смеси кислоты с водой. Процентное содержание кислоты в них равно 10 %, 30 %, 60 %, 80 % соответственно. Лаборанту нужно получить 50 %-ю смесь кислоты с водой. Какое наибольшее количество такой смеси он может получить, сливая смеси из данных сосудов?

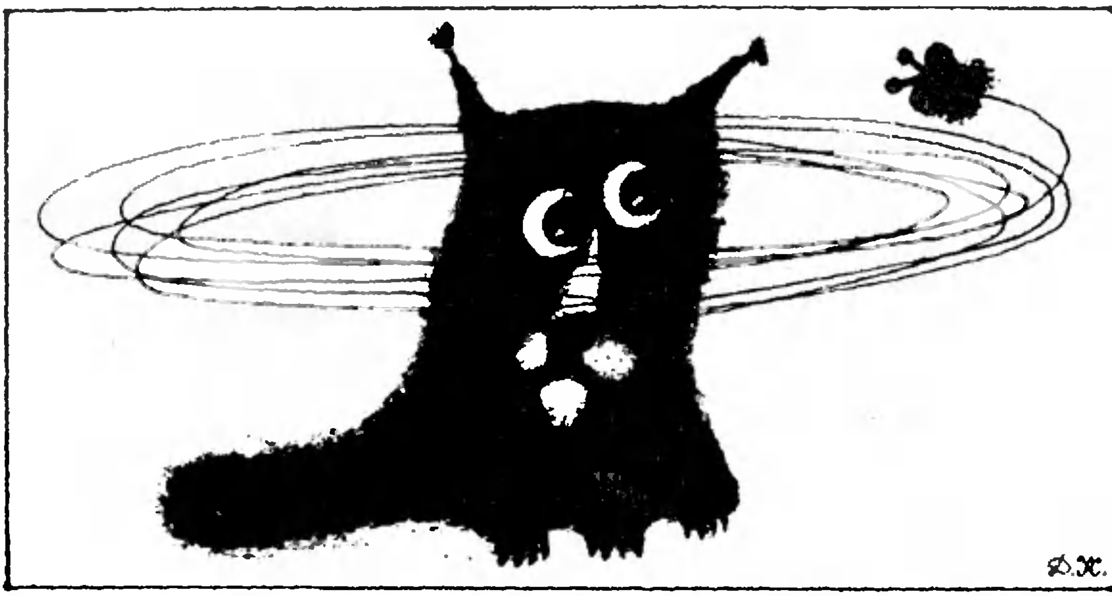
7. Нужно изготовить сплав, содержащий 40 % олова. На складе имеются 3 сплава с 60 %, 10 % и 40 % содержанием олова. Цена 1 кг каждого из имеющихся сплавов равна 4,3 руб., 5,8 руб. и 5,5 руб. соответственно. Какие сплавы и в какой пропорции надо взять на складе, чтобы 1 кг нового сплава был как можно дешевле?

8. (Задача вступительного экзамена отделений планирования народного хозяйства и экономической кибернетики экономического факультета МГУ 1984 г). Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для сборки 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго вида соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

9. На кольцевой магистрали расположены три склада и три магазина; расстояние между каждыми двумя соседними пунктами равно 1 км. На рисунке показано наличие товара на складах (в тоннах) со знаком «+» и потребности магазинов в товаре (в тоннах) со знаком «−». Требуется составить наиболее экономный план перевозок, чтобы перевезти весь груз со складов в магазины и чтобы сумма перевезенных тонно-километров была наименьшей. (Приведите наилучший, с вашей точки зрения, вариант перевозок и изложите те соображения, которые привели вас к этому ответу.)



*) Более сложный вариант этой задачи подробно разобран в книге Н. Б. Васильева и др. «Заочные математические олимпиады» (М.: Наука, 1986, задача 4-8).



Искусство программирования

Циклы, циклы, циклы...

Кандидат физико-математических наук
Л. Ф. ШТЕРНБЕРГ

Программирование потеряло бы многое, если бы не было понятия ветвления или вспомогательного алгоритма, но все же сердце программирования — это ц и к л ы. Один раз написанная команда, стоящая внутри цикла, будет выполняться многократно — это и придает смысл работе по составлению программы.

Работе команды повторения отведено 3 страницы в учебнике 9 класса, и с ее помощью решается много задач. Еще 2 страницы теории отведено ей в учебнике «Информатика-10» *); вводится дополнительная конструкция — цикл **для**, которая удобна, но без которой можно было бы и обойтись. Так что же можно сказать о циклах? Кому непонятна фраза на русском языке

пока условие **повторять** действия **кц**,

из которой и получается команда повторения (если заменить слово «**повторять**» словом «**нц**»)?. Мы и далее в записи команд цикла будем использовать слово «**повторять**» — записанный так цикл легче читать и понимать. И все-таки циклы *бывают разные*.

Начнем с простейшей з а д а ч и: *с помощью описанного на с.* 78—81 *учебника «Информатика-9» графического исполнителя нарисовать нотный стан с длиной линии 50 и расстоянием между линиями 3.* Это можно сделать такой программой (здесь и далее мы будем писать только тело программы, без заголовка и без описаний):

```
k: = 1;
пока k ≤ 5 повторять
   направо (90); рисуй; вперед (50);
   не рисуй; назад (50);
   налево (90); вперед (3);
   k: = k + 1
кц
```

Если бы нашим исполнителем командовал человек, не знакомый с программированием, то он бы сказал так: «выполнить 5 раз следующее: направо (90); рисуй ... вперед (3)». И действительно: переменная k нужна нам только для того, чтобы считать количество повторений цикла, в теле цикла она нам не нужна; но исполнитель-то об этом не знает, и он честно заведет переменную k и будет записывать туда текущее значение k: а вдруг его будут использовать в те-

*) Так автор кратко называет учебное пособие «Основы информатики и вычислительной техники, II часть» (*Примеч. ред.*)

ле цикла. А если бы исполнителю можно было сказать «выполнить 5 раз...», то он бы мог считать количество повторений цикла в «уме»: и быстрее, и память под переменную k тратить не надо. Так давайте научим наш исполнитель такой команде: введем в алгоритмический язык новую конструкцию цикла

повторять М **раз** действия **кц**,

где М может быть числом или любым выражением, дающим целочисленный результат. С помощью такого цикла программа рисования нотного стана записывается:

```
повторять 5 раз
  направо (90); рисуй; вперед (50);
  не рисуй; назад (50);
  налево (90); вперед (3);
кц
```

Циклы такого вида есть в языках *Робик* и *Рапира*, а на программируемых калькуляторах есть специальные команды для удобной реализации таких циклов; работают такие циклы быстрее цикла **пока**.

Упражнение. Напишите с применением цикла **повторять** М **раз** программу вычисления площади криволинейной трапеции (см. алгоритм А10 — «Информатика-9», с. 94).

Рассмотрим еще задачу. Пусть надо вычислить квадратный корень из некоторого числа, а под рукой нет таблиц или калькулятора с операцией извлечения корня. Тогда это можно сделать по следующему алгоритму: $y_0 = x/2$, $y_i = \frac{1}{2}(y_{i-1} + x/y_{i-1})$. Последовательность y_i будет приближаться к значению $\sqrt{x}$, и когда $|y_{i-1} - y_i| < \varepsilon$, то y_i отличается от точного значения $\sqrt{x}$ не более чем на ε. Запрограммируем этот метод, применяя известный нам цикл **пока**:

$y := x/2$;
пока $|y - y_{ст}| \geqslant \varepsilon$ **повторять**
  $y_{ст} := y$; $y := (y + x/y)/2$;
кц

(здесь $y_{ст}$ — это старое значение y: на каждом шаге в нем запоминается старое (предыдущее) значение y и вычисляется новое значение). Но, посмотрев повнимательнее, мы увидим, что программа работать не будет: на входе в цикл нам надо проверить разность y и $y_{ст}$, а $y_{ст}$ не имеет никакого значения. Проблема в том, чтобы как-то «проникнуть» внутрь цикла, а дальше все пойдет нормально. Для этого можно изменить первую строку:

$$y := x/2;\ y_{ст} := y + 2\cdot\varepsilon;$$

придав $y_{ст}$ какое угодно значение, отличающееся не менее, чем на ε, от значения y. Это значение нам не нужно, мы его сотрем тут же после входа в цикл, но таким способом мы «обманным путем» выполним условие в цикле и войдем в цикл. Ну и трюк! А все дело в том, что нам надо сначала что-то вычислить, а уж затем проверять. Эх, если бы был цикл, который сначала выполняет действия, а затем проверку!.. Так давайте введем такой цикл — цикл с проверкой условия в конце — он будет иметь вид:

повторять действия **до** условие;

и работать в точном соответствии со смыслом его записи на русском языке: выполняются действия, проверяется условие — если оно не удовлетворяется, то опять выполняются действия и т. д., а когда условие удовлетворено, то цикл кончает свою работу. Этот вид цикла называется «цикл **до**».

Такой цикл есть, например, в языке Паскаль и он очень удобно программируется на калькуляторах.

С помощью цикла **до** вычисление квадратного корня программируется просто и естественно:

$y := x/2$;
повторять $y_{ст} := y$; $y := (y + x/y)/2$;
до $|y - y_{ст}| < \varepsilon$;

В учебнике нет такой конструкции цикла, но... на с. 15 «Информатики-10» приведен пример программы в командах ЭВМ, где вычисляется значение выражения $k + (k-1) + (k-2) + \ldots + 2 + 1$. Для этой программы нет алгоритма на алгоритмическом языке, но если попробовать его написать, то нам придется использовать цикл **до**, так как в программе проверка окончания работы цикла выполняется в конце цикла:

$R_2 := 0$; $R_0 := R_1$;
повторять $R_2 := R_2 + R_0$; $R_0 := R_0 - 1$
до $R_0 = 0$;

(здесь в R_1 хранится значение k, а сумма получается в R_2).

Упражнение. Шарик массой 0,1 кг подвесили к пружине жесткостью 40 Н/м, оттянули вниз на 1 см и отпустили. Напишите программу с циклом **до**, вычисляющую момент прохождения шарика через положение равновесия. (Теория качания шарика см. на с. 71—72, «Информатика-9».)

Продолжаем анализировать алгоритмы с циклами. На с. 63 («Информатика-9») приведен алгоритм вычисления значения многочлена по схеме Горнера:

```
i: =0; y: =a[0];
пока i ≠ n повторять
  i: =i+1; y: =y·x+a[i]
кц
```

Посмотрите на переменную i: на каждом шаге цикла она изменяется на одно и то же значение (в данном случае на 1), и именно по этой переменной определяется, когда надо кончать цикл. Пролистайте учебник — почти на каждой странице вы найдете цикл, в котором какая-то переменная каждый раз изменяется на одно и то же значение, и именно по ее значению определяется завершение работы цикла. Такая ситуация встречается очень часто, поэтому такие циклы получили специальное название — *циклы с параметром*.

Параметром цикла называется та самая переменная, которая меняется одинаковым образом и служит для определения окончания работы цикла. Есть для них и специальная форма записи:

> **меняя** параметр **от** значение 1 **шагом** значение 2 **до** значение 3 **повторять** действия **кц**

Смысл этой конструкции, как всегда, соответствует значению фразы на русском языке. С ее помощью алгоритм схемы Горнера можно записать

```
y: =a[0];
меняя i от 1 шагом 1 до n повторять
  y: =y·x+a[i]
кц
```

Как видим, здесь заголовок цикла вобрал в себя и установку начального значения параметра, и изменение его, и проверку на окончание цикла. При этом шаг, если он равен единице, можно не задавать. Так, в нашем случае можно написать

> **меняя** i **от** 1 **до** n **повторять**

Такой цикл имеется практически во всех языках программирования, но по традиции имеет чуть другую форму записи:

для .... **от** ... **шаг** ... **до** ... **цикл**

и называется еще «цикл для». Именно в таком виде он есть в языках *Рапира*, ПЛ/1, *Алгол*-60, *Алгол*-68 и т. д. При этом в некоторых языках (*Фортран*, например, или школьный алгоритмический язык) сначала задается конечное значение, а затем шаг, а в некоторых (ПЛ/1) — можно писать и так, и так.

Почему же эта конструкция цикла появилась в учебнике «Информатика-10»? На первый взгляд этот цикл, как и цикл **повторять ... раз**, не дает нам ничего нового — только запись стала поудобнее: вместо

```
x: =a;
пока x ≤ b повторять
  ...     x: =x+h;
кц
```

пишем

меняя x **от** a **шагом** h **до** b **повторять** ... **кц**

и все. Но это не совсем так: например, если $a=0$, $b=1$, а $h=0{,}1$, то оба цикла сработают одинаково, но если $h=-0{,}1$, то цикл **пока** зациклится (значение a никогда не станет больше b), а цикл с параметром просто не выполнится ни одного раза: дело в том, что в этом цикле не просто проверяется условие «$x \leqslant b$», а контролируется нахождение значения параметра между a и b; при попытке выйти из диапазона в любую сторону, в частности, если шаг направлен не к b, а в обратную сторону, цикл выполняться не будет. Итак, цикл с параметром, как и цикл **повторять ... раз** — это *защищенная конструкция*: такие циклы никогда не зацикливаются.

Упражнение. Напишите с применением цикла для (цикла меняя) алгоритмы МИНЭЛЕМЕНТ и УПОРЯДОЧЕНИЕ (А7, А8 на с. 93, «Информатика-9»).

Но и у цикла с параметром может встретиться ситуация, когда заранее не ясно, сколько надо сделать шагов изменения параметра. Например, пусть в таблице из M элементов надо найти позицию, в которой встречается элемент, равный i. Для поиска элемента надо просмотреть таблицу элемент за элементом, меняя индекс на 1, но сколько шагов надо сделать — это заранее неизвестно. Справиться с этой задачей нам поможет гибрид из цикла **меняя** и цикла **пока**:

меняя i **от** 1 **шагом** 1 **пока** $a[i] \neq x$ **повторять** **кц**

Обратите внимание: тело цикла пустое — все, что надо, выполняет заголовок цикла; выход из цикла произойдет, когда $a[i]=x$, притом в i останется номер того элемента таблицы, на котором прервался цикл.

Такой цикл есть в языке ПЛ/1.

Понятно, что можно образовать и гибрид

меняя ... **от** ... **шагом** ... **повторять** ... **до** ... ,

в котором изменяется параметр, а проверка производится в конце. Приведенный выше метод поиска нужного элемента в таблице будет работать только тогда, когда мы уверены в том, что искомый элемент в таблице есть. Если его нет, то через M шагов значение i выйдет за границу таблицы, и нам будет выдано сообщение об ошибке, либо же ЭВМ начнет делать что-то непредсказуемое. Изменим наш алгоритм так, чтобы при отсутствии нужного элемента он давал нам, например, нулевое значение номера. Казалось бы, можно сделать так:

меняя i **от** 1 **шагом** 1 **пока** $i \leqslant M$ **и** $a[i] \neq x$ **повторять кц**;
если $i > M$ **то** $i := 0$; **все**;

но так делать нельзя: если нужного элемента нет, то на шаге $(M+1)$, даже убедившись в том, что $i > M$, ЭВМ все равно попробует сравнить несуществующий элемент $a[M+1]$ с x — и может дать сообщение об ошибке. Заглянув в учебник на с. 57, мы найдем способ выкрутиться из этого положения ценой введения дополнительной переменной и дополнительных сравнений (число сравнений придется ни много ни мало — удвоить), и изучив его, признаем, что не каждый смог бы его самостоятельно придумать. Вот если бы нам удалось заставить ЭВМ сначала сравнить i с M, а второе сравнение проводить только при положительном результате первого сравнения...

Но читатель уже, наверное, понял основную нашу мысль: *если нам неудобно работать, значит, нам чего-то не хватает и это «что-то» надо ввести*. А не хватает нам возможности выполнять две отдельные проверки и два выхода из цикла: по обнаружению элемента и по исчерпанию таблицы. Если учесть, что задача поиска — это весьма частая задача, то введение удобных средств для поиска — не мелочь. Но признав, что в цикле может быть более одной причины выхода, не стоит ограничиваться и двумя. И вот в нашем алгоритмическом языке появляется мощная и удобная конструкция цикла, охватывающая почти все нужные случаи:

меняя ... **от** ... **шагом** ... **до** ...
пока ... **повторить** ... **раз**
тело цикла
до ... **кц**,

где может отсутствовать любая из подчеркнутых частей, причем не должны присутствовать одновременно слова **меняя** и **раз**, а также **до** и **кц** (но либо **до**, либо **кц** должно быть). Работает этот цикл так: сначала изменяется параметр, если он есть; затем проверяется, не вышел ли параметр за диапазон, если параметр и диапазон заданы; либо проверяется, не превышено ли заданное число повторений, если есть слово **раз**; если первая проверка не вызвала окончания цикла, то проверяется условие, стоящее после **пока** (если оно есть); если и это условие не привело к окончанию цикла, то выполняется тело; далее проверяется выполнение условия, стоящего после **до** (если оно есть). После выхода из цикла параметр, если он есть, сохраняет последнее полученное значение.

Почти такая конструкция цикла есть в языке ПЛ/1.

С этим мощным циклом задача поиска элемента решается просто:

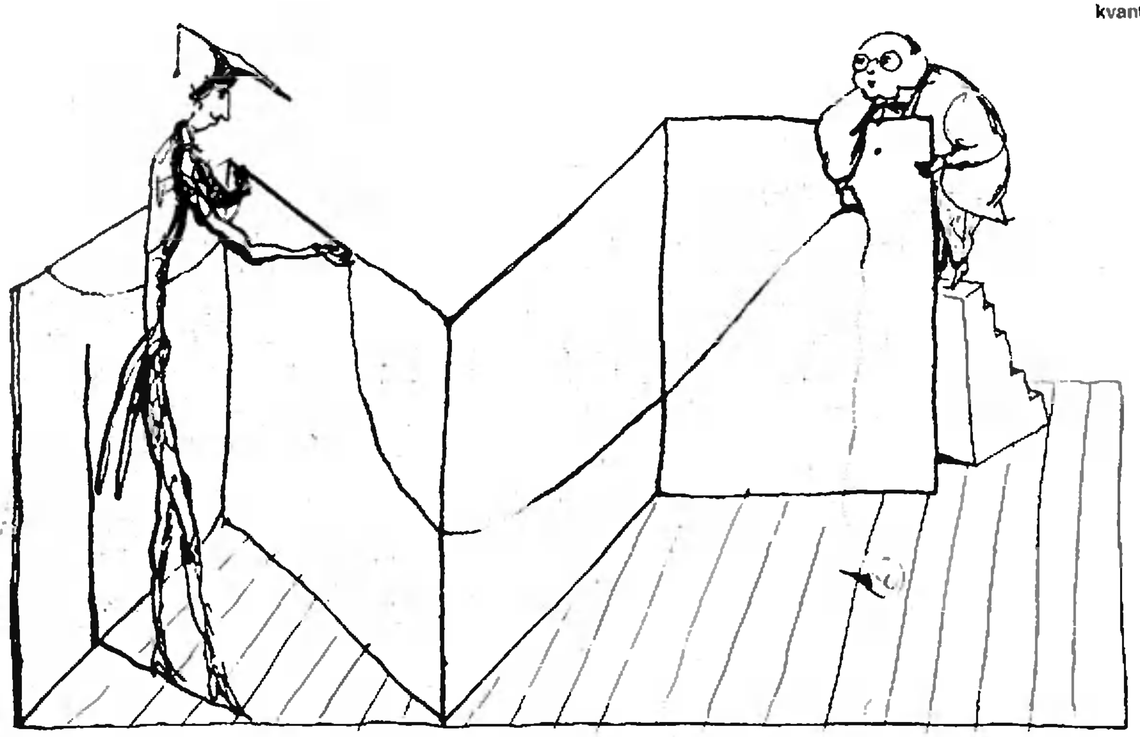
меняя i **от** 1 **до** M **пока** $a[i] \neq x$ **повторять кц**;
если $i > M$ **то** $i := 0$ **все**

или второй вариант:

меняя i **от** 1 **до** M **повторять до** $a[i] = x$;
если $i > M$ **то** $i := 0$ **все**

Обратите внимание: *в* **пока** *стоит условие продолжения цикла, а в* **до** *— условие окончания*. После цикла, проверив значение i, мы определяем, по какой именно из двух причин произошел выход из цикла.

Умело выбирая из своего арсенала подходящую конструкцию цикла, мастер-программист получит самую простую, короткую, быструю или понятную программу. Но следует подчеркнуть, что в этой статье, конечно, раскрыты далеко не все секреты циклов.



Практикум абитуриента

Вычисление расстояний и углов

Кандидат педагогических наук
Ю. И. ИОНИН,
В. Б. НЕКРАСОВ

В этой статье рассматривается несколько геометрических задач, для решения которых необходимо вычислить те или иные расстояния или углы в пространстве (эти задачи предлагались на вступительных экзаменах в разные вузы). Задачи такого типа удобно решать с помощью скалярного произведения векторов. Основной метод решения заключается в том, что в пространстве выбирается подходящий базис и составляется *таблица умножения* — таблица скалярных произведений векторов этого базиса. Имея такую таблицу и зная разложения векторов в выбранном базисе, вычислить длины этих векторов и углы между ними уже легко. Мы начнем с простой задачи, где этот метод напрашивается сам собой, а затем перейдем к более сложным задачам, продемонстрировав на них все основные случаи.

Задача 1 (МАИ, 1981). *В треугольной пирамиде ABCD все ребра имеют одинаковую длину. Точка M — середина ребра AD, точка O — центр треугольника ABC, точка N — середина ребра AB и точка K — середина ребра CD. Найдите угол между прямыми MO и KN.*

Решение. Примем длину ребра тетраэдра за единицу и выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$. Составим таблицу умножения для этого базиса (табл. 1, с. 48). Разложим векторы $\overrightarrow{MO}$ и $\overrightarrow{KN}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{6}(-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}),$$

$$\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}).$$

Угол φ между прямыми MO и KN вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{KN}|}{|\overrightarrow{MO}|\cdot|\overrightarrow{KN}|}.$$

Найдем $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{KN}$, $|\overrightarrow{MO}|$ и $|\overrightarrow{KN}|$, пользуясь таблицей 1:

	$\vec a$	$\vec b$	$\vec c$
$\vec a$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\vec b$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\vec c$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Таблица 1

	$\vec m$	$\vec n$	$\vec p$
$\vec m$	h^2	0	0
$\vec n$	0	a^2	$\frac{a^2}{2}$
$\vec p$	0	$\frac{a^2}{2}$	a^2

Таблица 2

	$\vec a$	$\vec b$	$\vec c$
$\vec a$	16	$16\cos\varphi$	$4\cos\varphi$
$\vec b$	$16\cos\varphi$	16	$4\cos\varphi$
$\vec c$	$4\cos\varphi$	$4\cos\varphi$	1

Таблица 3

$$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{KN}= \\ =\frac{1}{12}(-\vec a+2\vec b+2\vec c)(\vec a+\vec b-\vec c)=\frac{1}{12};$$

$$|\overrightarrow{MO}|=\frac{1}{6}\sqrt{(-\vec a+2\vec b+2\vec c)^2}=\frac{1}{2};$$

$$|\overrightarrow{KN}|=\frac{1}{2}\sqrt{(\vec a+\vec b-\vec c)^2}=\frac{\sqrt2}{2}.$$

Отсюда $\cos\varphi=\frac{\sqrt2}{6}$, $\varphi=\arccos\frac{\sqrt2}{6}$.

Однако условие задачи не всегда позволяет выбрать базис с полностью определенной таблицей умножения. В этом случае нужно попытаться составить уравнение относительно недостающего элемента.

Задача 2 (МФТИ, 1974). *Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a, точки O и O_1 являются центрами оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Длина ортогональной проекции отрезка AO_1 на прямую B_1O равна $\frac{5a}{6}$. Определите высоту призмы.*

Решение. Выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{AA_1}=\vec m$, $\overrightarrow{AB}=\vec n$, $\overrightarrow{AC}=\vec p$ (рис. 1). Пусть $h=|\vec m|$. Таблица 2 — это таблица умножения для базиса $(\vec m, \vec n, \vec p)$.

Ортогональная проекция отрезка AO_1 на прямую B_1O равна длине этого отрезка, умноженной на косинус угла φ между прямыми AO_1 и B_1O. Чтобы вычислить $|\overrightarrow{AO_1}|$ и $\cos\varphi$, разложим векторы $\overrightarrow{AO_1}$ и $\overrightarrow{B_1O}$ в базисе $(\vec m, \vec n, \vec p)$:

$$\overrightarrow{AO_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC_1})= \\ =\frac{1}{3}(\vec m+\vec m+\vec n+\vec m+\vec p)= \\ =\frac{1}{3}(3\vec m+\vec n+\vec p);$$

$$\overrightarrow{B_1O}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB_1}=\frac{1}{3}(\vec n+\vec p)-(\vec m+\vec n)= \\ =\frac{1}{3}(-3\vec m-2\vec n+\vec p).$$

Используя таблицу 2, находим:

$$|\overrightarrow{AO_1}|=|\overrightarrow{B_1O}|=\frac{1}{3}\sqrt{9h^2+3a^2},$$

$$\overrightarrow{AO_1}\cdot\overrightarrow{B_1O}=-\frac{1}{6}(6h^2+a^2),$$

$$\cos\varphi=\frac{6h^2+a^2}{2(3h^2+a^2)}.$$

Поскольку $|\overrightarrow{AO_1}|\cdot\cos\varphi=\frac{5a}{6}$, мы получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{9h^2+3a^2}\,(6h^2+a^2)}{6(3h^2+a^2)}=\frac{5a}{6}.$$

Отсюда $h=\frac{a\sqrt6}{3}$.

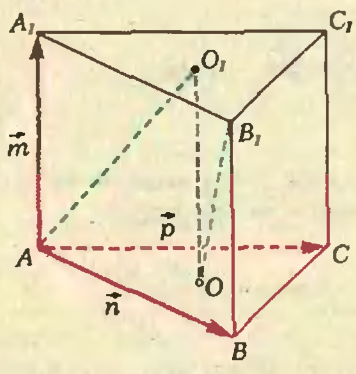


Рис. 1.

Можно выделить четыре основных типа задач на вычисление расстояний и углов:

1. Расстояние от точки до прямой

Дано: *точка M; прямая l с направляющим вектором $\vec a$, точка A, принадлежащая прямой l; $\overrightarrow{AM}=\vec m$.*

Найти: *расстояние от точки M до прямой l.*

(Векторы $\vec a$ и $\vec m$ в условии задачи даны в том смысле, что известны их разложения в некотором базисе с заданной таблицей умножения.)

Приведем схему решения этой задачи.

Пусть N — ортогональная проекция точки M на прямую l (рис. 2). Тогда $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=x\vec a-\vec m$. Неизвестный коэффициент x находится из условия перпендикулярности векторов $\vec{MN}$ и $\vec{a}$: $(x\vec{a}-\vec{m})\cdot\vec{a}=0$. Искомое расстояние $|\vec{MN}|=\sqrt{(x\vec{a}-\vec{m})^2}$.

Задача 3 (МФТИ, 1984). *В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, $SA=4$) точка D лежит на ребре SC, $CD=3$, а расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Найдите объем пирамиды.*

Решение. Выберем базис из векторов $\vec{SA}=\vec{a}$, $\vec{SB}=\vec{b}$, $\vec{SD}=\vec{c}$. Составим таблицу умножения для этого базиса, обозначив через φ плоский угол при вершине пирамиды (табл. 3). По условию расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Вычислив это расстояние с помощью таблицы 3, мы получим уравнение, позволяющее найти $\cos\varphi$.

Пусть N — проекция точки A на прямую BD (рис. 3). Тогда $\vec{AN}=$ $=\vec{DN}-\vec{DA}=x\vec{DB}-\vec{DA}=x(\vec{b}-\vec{c})-$ $-(\vec{a}-\vec{c})=-\vec{a}+x\vec{b}+(1-x)\vec{c}$. Так как векторы $\vec{AN}$ и $\vec{DB}$ перпендикулярны, получаем $(-\vec{a}+x\vec{b}+(1-x)\vec{c})(\vec{b}-\vec{c})=$ $=0$. Используя таблицу 3, после упрощений находим:

$$(17x-1)-8(x+1)\cos\varphi=0. \qquad (1)$$

Вычислим теперь длину вектора $\vec{AN}$:

$$|\vec{AN}|^2=(-\vec{a}+x\vec{b}+(1-x)\vec{c})^2=$$
$$=17x^2-2x+17-8(x+1)^2\cos\varphi.$$

Так как $|\vec{AN}|^2=4$,

$$17x^2-2x+13-8(x+1)^2\cos\varphi=0. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем $x=\frac{7}{9}$.

Поэтому $\cos\varphi=\frac{55}{64}$.

Найдем теперь длину отрезка SO — высоту пирамиды. Так как O — центр треугольника ABC, $\vec{SO}=\frac{1}{3}(\vec{SA}+$ $+\vec{SB}+\vec{SC})=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c})$, откуда $|\vec{SO}|=\frac{1}{3}\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c})^2}=$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{48+96\cos\varphi}=\frac{1}{2}\sqrt{58}.$$

Чтобы найти площадь основания пирамиды, вычислим $|\vec{AB}|^2$:

$$|\vec{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=\frac{9}{2}.$$

Теперь искомый объем

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{|\vec{AB}|^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot|\vec{SO}|=\frac{3\sqrt{174}}{16}.$$

2. Расстояние от точки до плоскости. Угол между прямой и плоскостью

Дано: *плоскость α с базисом $(\vec{a}, \vec{b})$, точка A, принадлежащая плоскости α, точка M, не лежащая в плоскости α, $\vec{AM}=\vec{m}$.*

Найти: *расстояние от точки M до плоскости α и угол между прямой AM и плоскостью α.*

Схема решения этой задачи такова. Пусть N — ортогональная проекция точки M на плоскость α (рис. 4). Тогда $\vec{MN}=\vec{AN}-\vec{AM}=x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m}$. Неизвестные коэффициенты x, y находятся из условия перпендикулярности вектора $\vec{MN}$ векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\begin{cases}(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m})\cdot\vec{a}=0,\\(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m})\cdot\vec{b}=0.\end{cases}$$

Зная x и y, находим расстояние от точки M до плоскости α, равное $\sqrt{(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m})^2}$.

Если $x\vec{a}+y\vec{b}\neq\vec{0}$, то угол между прямой AM и плоскостью α равен углу между векторами $\vec{m}$ и $x\vec{a}+y\vec{b}$, а если $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$, то прямая AM перпендикулярна плоскости α.

Задача 4 (МФТИ, 1983). *В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом*

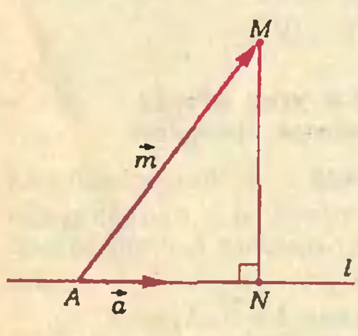


Рис. 2.

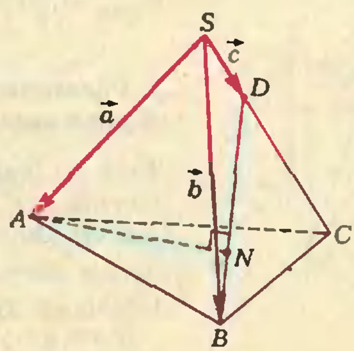


Рис. 3.

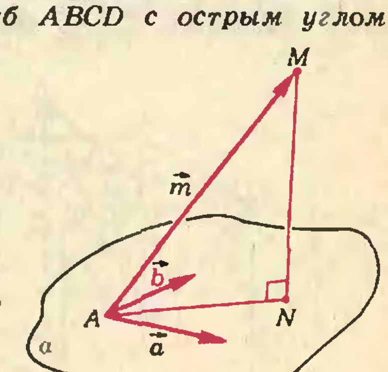


Рис. 4.

	$\vec m$	$\vec n$	$\vec p$
$\vec m$	a^2	$\frac{a^2}{2}$	0
$\vec n$	$\frac{a^2}{2}$	a^2	0
$\vec p$	0	0	a^2

Таблица 4

	$\vec a$	$\vec b$	$\vec c$
$\vec a$	32	16	0
$\vec b$	16	32	0
$\vec c$	0	0	4

Таблица 5

	$\vec a$	$\vec b$	$\vec c$
$\vec a$	3	0	0
$\vec b$	0	1	$\frac{1}{2}$
$\vec c$	0	$\frac{1}{2}$	1

Таблица 6

$\widehat{A}=60°$. *Все ребра призмы имеют длину a. Точка K является ортогональной проекцией точки B_1 на плоскость DA_1C_1, а точка L — ортогональной проекцией точки K на плоскость DD_1C_1C. Найдите объем пирамиды DCLK.*

Решение. Примем за основание пирамиды $DCLK$ треугольник CDL, лежащий в плоскости DD_1C_1C. Тогда отрезок KL — высота пирамиды (рис. 5). Следовательно, $V_{KCDL}=\frac{1}{3}S_{CDL}\cdot KL=\frac{1}{6}DC\cdot LM\cdot KL$, где M — ортогональная проекция точки L на прямую DC.

Выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{C_1B_1}=\vec m$, $\overrightarrow{C_1D_1}=\vec n$, $\overrightarrow{C_1C}=\vec p$ и заполним таблицу 4 — таблицу умножения для этого базиса.

Далее,

$$\overrightarrow{B_1K}=\overrightarrow{C_1K}-\overrightarrow{C_1B_1}=$$
$$=x\overrightarrow{C_1A_1}+y\overrightarrow{C_1D}-\overrightarrow{C_1B_1}=$$
$$=x(\vec m+\vec n)+y(\vec n+\vec p)-\vec m=$$
$$=(x-1)\vec m+(x+y)\vec n+y\vec p.$$

Так как вектор $\overrightarrow{B_1K}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{C_1A_1}$ и $\overrightarrow{C_1D}$, получаем систему

$$\overrightarrow{B_1K}\cdot(\vec m+\vec n)=0,\quad \overrightarrow{B_1K}\cdot(\vec n+\vec p)=0.$$

Заменив вектор $\overrightarrow{B_1K}$ его разложением в базисе $(\vec m, \vec n, \vec p)$ и воспользовавшись таблицей 4, придем после упрощений к системе уравнений $2x+y=1$, $3x+4y=1$, откуда $x=\frac{3}{5}$, $y=-\frac{1}{5}$.

Следовательно, $\overrightarrow{C_1K}=\frac{3}{5}(\vec m+\vec n)-\frac{1}{5}(\vec n+\vec p)=\frac{1}{5}(3\vec m+2\vec n-\vec p)$. Аналогично $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{C_1L}-\overrightarrow{C_1K}=z\overrightarrow{C_1D_1}+t\overrightarrow{C_1C}-\overrightarrow{C_1K}=z\vec n+t\vec p-\frac{1}{5}(3\vec m+2\vec n-\vec p)=\frac{1}{5}(-3\vec m+(5z-2)\vec n+(5t+1)\vec p)$. Так как $\overrightarrow{KL}\cdot\vec n=0$ и $\overrightarrow{KL}\cdot\vec p=0$, то $-\frac{3}{2}+5z-2=0$, откуда $z=\frac{7}{10}$, и $5t+1=0$, откуда $t=-\frac{1}{5}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{KL}=\frac{1}{5}\left(-3\vec m+\frac{3}{2}\vec n\right)=\frac{3}{10}(-2\vec m+\vec n).$$

Теперь можно найти высоту пирамиды $KCDL$:

$$KL=\frac{3}{10}\sqrt{(-2\vec m+\vec n)^2}=\frac{3a\sqrt3}{10}.$$

Осталось найти $\overrightarrow{LM}$:

$$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CL}=u\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{C_1L}-\overrightarrow{C_1C})=$$
$$=u\vec n-z\vec n-t\vec p+\vec p=\left(u-\frac{7}{10}\right)\vec n+\frac{6}{5}\vec p.$$

Так как $\overrightarrow{LM}\cdot\vec n=0$, то $u=\frac{7}{10}$, откуда $\overrightarrow{LM}=\frac{6}{5}\vec p$, $|\overrightarrow{LM}|=\frac{6a}{5}$. Таким образом,

$$V_{KCDL}=\frac{1}{6}\cdot a\cdot\frac{6a}{5}\cdot\frac{3a\sqrt3}{10}=\frac{3a^3\sqrt3}{50}.$$

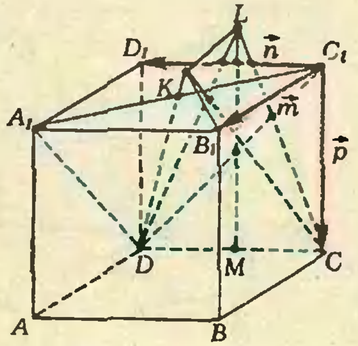


Рис. 5.

3. Расстояние и угол между скрещивающимися прямыми

Дано: *прямая l_1 с направляющим вектором $\vec a_1$, точка A_1, принадлежащая прямой l_1; прямая l_2 с направляющим вектором $\vec a_2$, точка A_2, принадлежащая прямой l_2; $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec m$.*

Найти: *расстояние и угол между прямыми l_1 и l_2.*

Задачи этого типа решаются по следующей схеме.

Косинус угла φ между прямыми l_1 и l_2 находится по формуле

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}.$$

Чтобы определить расстояние между прямыми l_1 и l_2, то есть длину их общего перпендикуляра P_1P_2 ($P_1\in l_1$, $P_2\in l_2$, рисунок 6), представим вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$ в виде $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{P_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2P_2}=x\vec{a}_1+\vec{m}+y\vec{a}_2$. Неизвестные коэффициенты x, y находятся из условий перпендикулярности вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$ векторам $\vec{a}_1$ и a_2:

$$\begin{cases}(x\vec{a}_1+y\vec{a}_2+\vec{m})\,\vec{a}_1=0,\\(x\vec{a}_1+y\vec{a}_2+\vec{m})\,\vec{a}_2=0.\end{cases}$$

Искомое расстояние — длина вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$, то есть $\sqrt{(x\vec{a}_1+y\vec{a}_2+\vec{m})^2}$.

З а д а ч а 5 (МГУ, мех.-мат., 1977). *Основанием пирамиды SABC является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и имеет длину 2. Найдите величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.*

Р е ш е н и е. Пусть M и N — середины ребер BC и AB (рис. 7). Выберем в качестве базиса векторы $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CS}=\vec{c}$. Таблица умножения для этого базиса — это таблица 5. Найдем угол φ между прямыми SM и CN:

$$\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CS}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}=$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{b}-2\vec{c});\ \overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

Вычислим $\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{CN}$, $|\overrightarrow{SM}|$, $|\overrightarrow{CN}|$:

$$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{CN}=12,\ |\overrightarrow{SM}|=2\sqrt{3},\ |\overrightarrow{CN}|=2\sqrt{6}.$$

Следовательно, $\cos\varphi=\dfrac{12}{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi=45°$.

Вычислим теперь расстояние между прямыми SM и CN, то есть длину их общего перпендикуляра PQ ($P\in SM$, $Q\in CN$)

$$\overrightarrow{PQ}=x\overrightarrow{SM}+y\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{SC}=$$
$$=\frac{x}{2}(\vec{b}-2\vec{c})+\frac{y}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}=$$
$$=\frac{1}{2}(y\vec{a}+(x+y)\,\vec{b}-(2x+2)\,\vec{c}).$$

Из условия перпендикулярности вектора $\overrightarrow{PQ}$ векторам $\vec{b}-2\vec{c}$ и $\vec{a}+\vec{b}$ получаем систему уравнений

$$3x+3y=-1,\ x+2y=0,$$

откуда $x=-\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{1}{3}$.

Следовательно, $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{6}(\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c})$,

$$PQ=\frac{1}{6}\sqrt{(\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

4. Угол между плоскостями

Угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярными им прямыми. Действительно, пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c (рис. 8). Через какую-нибудь точку, не лежащую на прямой c, проведем прямые a и b, перпендикулярные плоскостям α и β соответственно. Тогда плоскость, проходящая через прямые a и b, пересекает плоскости α и β по прямым a_1 и b_1, перпендикулярным прямой c (см. рис. 8). Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a_1 и b_1, который, в свою очередь, равен углу между прямыми a и b (так как прямые a, b, a_1, b_1 лежат в одной плоскости и $a\perp a_1$, $b\perp b_1$).

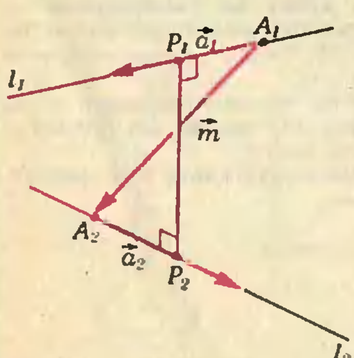


Рис. 6.

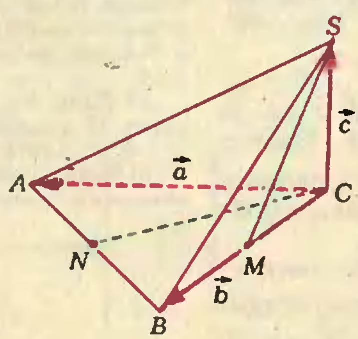


Рис. 7.

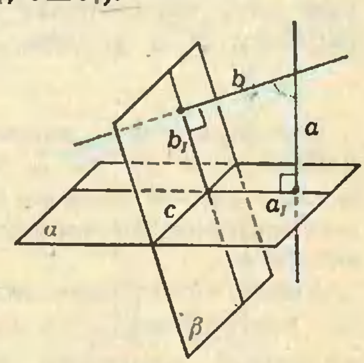


Рис. 8.

Таким образом, *задача нахождения угла между плоскостями сводится к вычислению угла между прямыми.*

Задача 6 (НГУ, 1981). *В основании треугольной пирамиды SABC лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, $SA=\sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым SB и AC, плоскость β параллельна прямым SC и AB. Определите величину угла между плоскостями α и β.*

Решение. Выберем в качестве базиса векторы $\vec{AS}=\vec{a}$, $\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{AC}=\vec{c}$. Таблица 6 (с. 50) — это таблица умножения для векторов этого базиса.

Если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — ненулевые векторы, перпендикулярные плоскостям α и β соответственно, а φ — угол между этими плоскостями, то

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}.$$

В качестве вектора $\vec{m}$ можно взять любой ненулевой вектор, удовлетворяющий условиям $\vec{SB}\cdot\vec{m}=0$, $\vec{AC}\cdot\vec{m}=0$.

Запишем вектор $\vec{m}$ в виде $\vec{m}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$. Так как $\vec{SB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{AC}=\vec{c}$, мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases}(\vec{b}-\vec{a})(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=0,\\ \vec{c}\,(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=0.\end{cases}$$

С помощью таблицы 6 приводим эту систему к виду

$$6x-2y-z=0,\ y+2z=0.$$

Число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных. Это объясняется тем, что вектор $\vec{m}$ условием $\vec{m}\perp\alpha$ не определен однозначно. Решение такой системы сводится к выражению двух неизвестных через третье. Выразим x и y через z: $y=-2z$, $x=-\frac{1}{2}z$.

Положив теперь, например, $z=-2$, найдем x и y: $x=1$, $y=4$. Вектор $\vec{m}=\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}$ — один из ненулевых векторов, перпендикулярных плоскости α.

Аналогично будем искать ненулевой вектор $\vec{n}=t\vec{a}+u\vec{b}+v\vec{c}$, перпендикулярный плоскости β: $\vec{SC}\cdot\vec{n}=0$, $\vec{AB}\cdot\vec{n}=0$;

$$\begin{cases}(\vec{c}-\vec{a})(t\vec{a}+u\vec{b}+v\vec{c})=0,\\ \vec{b}\,(t\vec{a}+u\vec{b}+v\vec{c})=0,\end{cases}$$

так что

$$t=-\frac{1}{2}u,\quad v=-2u.$$

Можно взять $u=-2$. Тогда $v=4$, $t=1$, так что $\vec{n}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$. (Выражение для вектора $\vec{n}$ можно было получить из выражения для вектора $\vec{m}$, заметив, что условие, задающее плоскость β, получается из условия, задающего плоскость α, перестановкой точек B и C.)

Теперь вычисляем $\cos\varphi$:

$$\vec{m}\cdot\vec{n}=(\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c})(\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c})=-3,$$

$$|\vec{m}|=\sqrt{(\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c})^2}=\sqrt{15},\ |\vec{n}|=\sqrt{15},$$

$$\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}}=\frac{1}{5}.$$

Таким образом, $\varphi=\arccos\frac{1}{5}$.

Упражнения

1 (МИНХ, 1977). В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC, а точка M — середина стороны CD. Найдите AD, если $AK=6$, $AM=3$ и $\angle KAM=60^\circ$.

2 (МФТИ, 1969). В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BDC, а точка E — середина ребра AB. Найдите угол между прямыми MN и DE.

3 (НГУ, 1978). В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длины катетов AB и AC которого равны a. Боковые ребра AA', BB', CC' образуют с плоскостью основания углы в 60°, а диагональ BC' боковой грани $CBB'C'$ перпендикулярна ребру AC. Найдите объем призмы, если длина диагонали BC' равна $a\sqrt{6}$.

4 (МФТИ, 1983). В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна a, длина бокового ребра равна $a/2$. Точка D является ортогональной проекцией середины ребра A_1C_1 на плоскость AB_1C, а точка E — ортогональной проекцией точки D на плоскость AA_1B_1B. Найдите объем пирамиды A_1B_1DE.

5 (МФТИ, 1977). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC, параллельные плоскости SAD.

а) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BD такую, что $DM:DB=1:3$. Найдите его длину.

б) Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

Варианты вступительных экзаменов

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На координатной плоскости расположены точки $A(3;\ 1)$ и $B(-2;\ 4)$. Найдите координаты точки C, лежащей на биссектрисе I и III координатных углов и одинаково удаленной от точек A и B.

2. Решите неравенство

$$\sqrt{9x+\frac{1}{2x+1}}\cdot(9-25x^2)\geqslant 0.$$

3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(1-a)\,\mathrm{tg}^2\,x-\frac{2}{\cos x}+1+3a=0$$

имеет более одного решения на интервале $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

4. Длина стороны AB параллелограмма $ABCD$ равна 2, $\widehat{BAD}=45^\circ$. Точки E и F расположены на диагонали BD, причем $\widehat{AEB}=\widehat{CFD}=90^\circ$, $BF=\frac{3}{2}\,BE$. Найдите площадь параллелограмма.

5. Длина ребра основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина) равна 8. Точки K и L расположены на ребрах AB и AC соответственно, причем $AK=7$, $AL=4$. Известно, что для данной пирамиды существует единственный конус, вершина которого совпадает с точкой K, центр основания лежит на прямой SC, а отрезок KL является одной из образующих. Найдите объем конуса.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)}\cdot\log_5 x=-2.$$

2. Точка D лежит на стороне BC прямоугольного треугольника ABC ($\widehat{C}=90^\circ$), причем $AB=5$, $\widehat{ADC}=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$, $DB=\frac{4\sqrt{10}}{3}$. Найдите площадь треугольника ABC.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x=\sin 2y,\\ 2\sin(4x+8y)\sin(3x+10y)+\\ \qquad +5\cos(7x+2y)=4.\end{cases}$$

4. Длина высоты правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) в $\sqrt{3}$ раз больше длины ребра основания. Точка E — середина апофемы грани ASB. Найдите угол между прямой DE и плоскостью ASC.

5. Для каждого числа p на координатной плоскости рассматривается множество M всех точек, координаты $(a;\ b)$ которых удовлетворяют условиям $a>0$, $b>0$, $a+b>1$, $3ap<bp+2p^2$ и таковы, что система уравнений

$$\begin{cases}px^2+2xy+y^2=b^2,\\ 3x+y=a\end{cases}$$

не имеет решений.

а) Найдите площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество M, если $p=\frac{21}{5}$.

б) Найдите все действительные p, при которых множество M является внутренней областью многоугольника.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Чашка пружинных весов массой m_1 совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой A (рис. 1). Когда чашка находилась в крайнем нижнем положении, на нее положили груз массой m_2. В результате колебания прекратились. Определите первоначальный период колебаний чашки.

2. Два теплоизолированных баллона соединены трубкой, перекрытой вентилем. В первом баллоне объемом $V_1=500$ л находится $m_1=16{,}8$ кг азота под давлением $p_1=3\cdot10^6$ Па; во втором баллоне объемом $V_2=250$ л находится $m_2=1{,}2$ кг аргона под давлением $p_2=5\cdot10^5$ Па. Какие давление и температура установятся в баллонах, если открыть вентиль? Теплоемкость моля азота $C_1=5/2\ R$, его молярная масса $M_1=28$ г/моль; теплоемкость моля аргона $C_2=3/2\ R$, молярная масса $M_2=40$ г/моль; газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

3. По вертикальным проводящим рельсам в поле тяжести может скользить без трения контакт массой m и длиной l. Рельсы замкнуты на идеальную катушку с индуктивностью L и находятся в горизонтальном магнитном поле, перпендикулярном плоскости рисунка 2. Вначале контакт поддерживался в покое внешней силой. В некоторый момент времени внешняя сила убирается, и контакт начинает двигаться вниз с нулевой началь-

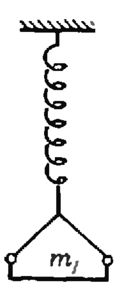


Рис. 1.

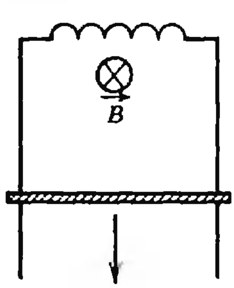


Рис. 2.

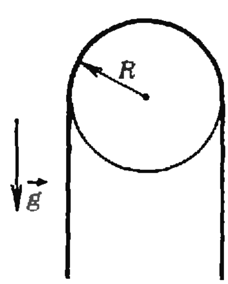


Рис. 3.

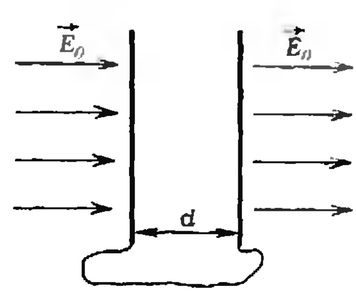


Рис. 4.

ной скоростью. Определите модуль вектора магнитной индукции B, если известно, что максимальная скорость, с которой движется контакт, равна v_0. Сопротивлением контакта и рельсов пренебречь.

4. С помощью тонкой линзы получают изображение предмета. К линзе вплотную приставляют другую линзу. При неизменном расстоянии до предмета получают изображение той же величины, что и ранее. Найдите, с каким увеличением изображается предмет. Абсолютные значения фокусных расстояний линз равны.

Вариант 2

1. На гладком блоке радиусом R висит однородный гибкий канат массой m и длиной l (рис. 3). Найдите максимальную силу натяжения каната.

2. В последние годы популярность приобретает катание на воздушных шарах. Воздух в таком шаре нагревается с помощью газового факела, расположенного у отверстия в нижней части шара. Какую температуру должен иметь воздух в шаре, чтобы поднять двух человек? Масса людей, оболочки шара, корзины и баллона с газом составляет $m=420$ кг, диаметр шара $D=20$ м, температура окружающего воздуха $t_0=+17$ °C, средняя молярная масса воздуха $M=29$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К), атмосферное давление $p=10^5$ Па.

3. Две соединенные проводником пластины конденсатора площадью S каждая находятся на расстоянии d друг от друга (это расстояние мало по сравнению с размерами пластин) во внешнем однородном электрическом поле, напряженность которого равна $\vec{E}_0$ (рис. 4). Какую работу нужно совершить, чтобы медленно сблизить пластины до расстояния $d/2$?

4. Телеобъектив с фокусным расстоянием $F=1$ м и переходное кольцо толщиной $a=9$ см позволяют снимать фотоаппаратом с расстояния не меньше $d=11$ м. С какого минимального расстояния можно вести съемку с помощью этого объектива без кольца? Примечание. Переходное кольцо устанавливается между объективом и плёнкой и служит для дополнительного увеличения расстояния между ними.

Публикацию подготовили *К. Л. Самаров, А. А. Шеронов*

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2+x+\frac{p^2}{(x-1)^2}}=x-\frac{p}{x-1}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{18+82\sin x}+3\cos x=0.$$

3. AB и CD — параллельные прямые, лежащие в двух пересекающихся плоскостях, образующих угол в 60°. Точки A и D удалены от линии пересечения плоскостей на расстояния a и b. Найдите расстояние между AB и CD.

4. Найдите интервалы монотонности и точки экстремума функции, заданной равенством

$$f(x)=2\ln(x-2)-x^2+4x+1.$$

Постройте график этой функции.

5. Решите уравнение

$$(\sqrt{\operatorname{ctg} x}-x+2)(12x^2-25x+12)=0.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$x=a-\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{a\sin x-2}{a-2\cos x}=\frac{a\cos x-2}{a-2\sin x}$$

и определите число его корней на отрезке $[20\pi; 29\pi]$.

3. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой угол в 60°. Две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

4. При $a=0$ исследуйте функцию

$$y=x^4+2ax^3-2x^2-6ax$$

и постройте ее график. Покажите, что график имеет ось симметрии. При каких еще значениях a график имеет вертикальную ось симметрии?

5. Решите уравнение

$$\sin x=2\sin^2 x$$

и определите значения a, при которых это уравнение равносильно уравнению

$$\sin 3x=(a+1)\sin x-2|a-1|\sin^2 x.$$

Публикацию подготовил *В. А. Тонян*

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Каждое боковое ребро равно a и наклонено к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды.

2. Решите неравенство

$$\log_{0,3}(x^2-x-20)-\log_{0,3}(x+4)>0.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\cos x-\cos 3x}{\sin x}=0.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^2(x-6)$ на отрезке $[-1; 3]$.

Вариант 2
(физический факультет)

1. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, угол между диагоналями

боковых граней, исходящими из одной вершины, равен β. Найдите объем призмы.

2. Решите неравенство

$$\frac{29-x-x^2}{5x+2}<1.$$

3. Решите уравнение

$$\log_3(4\cdot 3^x-1)=2x+1.$$

4. Решите уравнение

$$(1+\cos 2x)\sin x=\cos^2 x.$$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{(x+3)^2}{x-4}$ на отрезке $(-6; 0)$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. С какой высоты падало тело, если в последнюю секунду оно прошло путь $l=65$ м? Начальная скорость равна нулю.

2. С горы высотой $h=2$ м и основанием $a=5$ м съезжают санки. Они останавливаются, пройдя по горизонтальному участку путь $l=35$ м от основания горы. Найдите коэффициент трения.

3. До какого давления накачали футбольный мяч емкостью $V=3$ л, если при этом было сделано $n=40$ качаний поршневого насоса? За каждое качание мяч захватывает из атмосферы $V_0=150$ см^3 воздуха. Вначале мяч был пустой. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па.

4. В сосуд, содержащий $m_1=3$ кг воды при $t_1=20$ °С, впускают $m_2=300$ г водяного пара при $t_2=100$ °С. Какая температура установится в сосуде? Удельная теплоемкость воды $c_1=4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования $r=2{,}3\cdot 10^6$ Дж/кг.

5. К источнику тока с внутренним сопротивлением $r=0{,}4$ Ом подключен резистор сопротивлением $R=6$ Ом. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая во внешней части цепи, если последовательно первому подключить еще один такой же резистор?

6. Два электронагревателя, сопротивления которых $R_1=25$ Ом и $R_2=20$ Ом, могут быть включены в сеть с напряжением $U=200$ В. Какое количество теплоты выделят нагреватели в течение $\tau=2$ мин при их последовательном и параллельном соединении?

7. Луч света переходит из воды в стекло. Угол падения $\alpha=35°$. Найдите угол преломления, если показатель преломления воды $n_{в}=1{,}3$, стекла $n_{ст}=1{,}6$.

8. Свет какой длины волны следует направить на поверхность платины, чтобы скорость вылетающих из нее электронов $v=2\cdot 10^6$ м/с? Работа выхода электронов из платины $A=1\cdot 10^{-18}$ Дж, постоянная Планка $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с, масса электрона $m=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

Публикацию подготовили
К. Н. Дуничев, О. Ю. Овчинников

Информация

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете им. М. В. Ломоносова принимаются на индивидуальное обучение учащиеся седьмых классов общеобразовательных школ и СПТУ, за исключением проживающих в Москве и Ленинграде.

Цель ВЗМШ — рассказать своим ученикам о многих интересных вещах, связанных со школьным курсом математики, научить решать самые разнообразные задачи, приучить самостоятельно работать с книгой и грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге. Всем успешно окончившим ВЗМШ (в том числе ее филиалы и группы «Коллективный ученик») выдаются соответствующие удостоверения.

Для поступления в ВЗМШ надо успешно выполнить первое задание. Преимуществами пользуются ребята, проживающие в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах.

Задание 1. *Изучите статью В. Л. Гутенмахера и Ж. М. Раббота «Выбор наилучшего варианта» в этом номере журнала (см. с. 37) и постарайтесь решить задачи для самостоятельного решения.* Решить все задачи вовсе не обязательно; отдельные пункты засчитываются как самостоятельные задачи.

Решения задач надо выполнить на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью; не надо сворачивать ее в трубку. На обложку тетради надо наклеить листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	*Московская*
Фамилия, имя ученика	*Иванов Петр*
Год рождения	*1973*
Класс и школа	*7 класс «Б» школы № 2*
Фамилия, и. о. учителя математики	*Орлов Борис Петрович*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 3, мать — медсестра*
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)	*123456, г. Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1.*

В тетрадь надо вложить два листка бумаги размерами 6×14 см с четко написанным почтовым адресом, фамилией и именем ученика.

Задачи в решениях должны идти в том же порядке, как и в статье: сначала условие, потом решение.

Срок отправки задания № 1 — не позднее 15 марта 1987 г. (по почтовому штемпелю).

Для того чтобы задание было зачтено, нужно решить бо́льшую часть задач. Если вы успешно выполните это задание, то, начиная с сентября 1987 г., вы будете получать все дальнейшие задания, которые содержат теоретический материал и задачи для самостоятельного решения, а также контрольные задачи. Все дальнейшие контрольные работы будут проверяться и подробно рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов, в которых имеются филиалы ВЗМШ. Филиалы работают по тем же программам и пособиям, что и Московская группа ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант», поэтому рекомендуем на него подписаться (это можно сделать без ограничений с любого месяца в любом отделении связи; подписной индекс 70465; журнал распространяется только по подписке).

Задание № 1 надо выслать по адресу: «119823, Москва В-234, ГСП, МГУ, ВЗМШ, на прием» или по адресу соответствующего филиала. Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Иваново, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Ташкент, Устинов, Фрунзе, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Магнитогорск, Орел, Павлодар, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиалы в Дубне при Объединенном институте ядерных исследований, в Могилеве — при областном Дворце пионеров и школьников и Заочная физико-техническая школа при Московском институте стали и сплавов (см. с. 00 этого номера «Кванта»).

Учащиеся, проживающие на северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми АССР), в прибалтийских республиках и в Белоруссии (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей), присылают свои работы по адресу: «193130, г. Ленинград, 8-я Советская ул., 3, С-З ЗМШ. На прием».

Школьники и учащиеся СПТУ, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение, имеют возможность заниматься по той же программе в группах «Коллективный ученик ВЗМШ». Каждая такая группа — это математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ и по ее пособиям. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1987 г. на два потока: для тех, кто с сентября 1987 г. начнет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе (соответственно для учащихся I и II курсов СПТУ). Прием в группы проводится без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться в 1987/88 учебном году. Заявление должно быть заверено директором школы (СПТУ) и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Без контрольной работы, только по заявлениям, принимаются на индивидуальное обучение участники Всесоюзной и республиканских, а также победители краевых и областных олимпиад по математике для школьников и учащихся СПТУ.

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием на заочное отделение учащихся седьмых классов общеобразовательных школ. Зачисление на Малый механико-математический факультет (МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в сентябре. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно закончившие 8-й или 9-й классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат № 18 при МГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получают удостоверения об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 15 апреля выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;
2) фамилия, имя учащегося;
3) школа и класс (полное название);
4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);
5) фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 4×6 см^2, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и пришлите по адресу: 119899 Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечания:

1. Для школьников 7—10 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону: 139-39-43.

2. Для школьников Казахстана и Молдавии действуют филиалы МММФ МГУ: при математическом факультете Казахского государственного университета и при факультете математики и кибернетики Кишиневского государственного университета. Их адреса:

480012 Алма-Ата, ул. Кирова-Масанчи 47/39, Каз.ГУ, математический факультет, филиал МММФ МГУ.

277003 Кишинев, ул. Садовая 60, КГУ, факультет математики и кибернетики, филиал МММФ МГУ.

Задачи вступительной работы на Малый механико-математический факультет в 1987 году

1. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,1?

2. В треугольнике совпадают центры вписанной и описанной окружностей. Докажите, что этот треугольник равносторонний.

3. Докажите, что если a, b — положительные числа, то

$$\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}.$$

4. Длины сторон треугольника — последовательные целые числа, большие 3. Докажите, что основание высоты, опущенной на среднюю по величине сторону, лежит внутри стороны и делит ее на отрезки, разность длин которых равна 4.

5. Сколькими нулями оканчивается произведение

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 98\cdot 99\cdot 100?$$

6. Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин имеет наименьшую длину.

7. Докажите, что число $11\ldots1122\ldots22$, состоящее из 100 единиц и 100 двоек, есть произведение двух последовательных целых чисел.

8. Докажите, что если $b=a-1$, то

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)\times\\ \times(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})=a^{64}-b^{64}.$$

9. В пруд выпустили 30 щук, которые постепенно поедали друг друга. Щука считается сытой, если она съела не менее трех щук (сытых или голодных). Докажите, что наибольшее число щук, которые могут насытиться, равно 9 (в это число входят и сытые щуки, которые сами были съедены).

10. Улитка ползет из точки A плоскости с постоянной по величине скоростью, поворачивая на 90° налево или направо каждые 15 минут. Докажите, что она может вернуться в точку A только через целое число часов.

Заочная физико-техническая школа при МИСиСе

Филиал Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа при Московском ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени институте стали и сплавов — объявляет набор учащихся в восьмые, девятые и десятые классы на 1987/88 учебный год.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике, а также в профориентации по профилю МИСиСА.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры общей физики и кафедры теоретической физики МИСиСа.

Работа школы организована следующим образом. Четыре-пять раз в год учащимся рассылаются контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач, а также профориентационные материалы. Присланные учащимися работы проверяются и вместе с оценками и комментариями отправляются учащимся.

Успешно занимающиеся десятиклассники, показавшие профессиональную ориентированность и проявившие интерес к специальностям института, во время зимних каникул будут приглашены для очного прохождения курса «Введение в специальность» и участия в научно-технической олимпиаде. Учащиеся, успешно окончившие школу в полном объеме, получают удостоверение, которое дает преимущество при поступлении в МИСиС — так, в прошлом году выпускники ЗФТШ получили дополнительно 1—2 балла.

Занятия в ЗФТШ начнутся с 1 октября 1987 года. Для зачисления в школу необходимо прислать заявление с указанием фамилии, имени, отчества, полного домашнего адреса, профессии и занимаемой должности родителей, а также приложить справку из школы с указанием класса и годовых оценок по физике и математике. Заявление и справку вместе с решением первого (вступительного) задания по математике, о котором написано в статье «Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу» в этом номере журнала, нужно выслать не позднее 5 мая по адресу: 117049 Москва, Ленинский пр., 4, МИСиС, ЗФТШ.

Несколько слов о самом институте. Московский институт стали и сплавов готовит инженерные и научные кадры для металлургической и машиностроительной промышленности и ряда новых отраслей науки и техники. На многих кафедрах института обучение строится так, что студенты уже с первого курса приобщаются к самостоятельной научной работе.

Поступив в МИСиС, вы сможете заниматься теорией и экспериментом в области физики твердого тела, исследовать свойства веществ при низких температурах, изучать высокотемпературные процессы в жидкостях и твердых телах, создавать сплавы с новыми свойствами и новые полупроводниковые приборы.

Выпускники института работают в академических и отраслевых научно-исследовательских институтах, в лабораториях крупных промышленных предприятий. Многие продолжают свое образование в аспирантуре института.

Ответы, указания, решения

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $C = (-2{,}5;\ -2{,}5)$.

2. $\left]-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{6};\ \frac{3}{5}\right]$.

3. $1/3 < a < 1$, $a \neq 1/2$. Указание. Выполните замену $y = 1/\cos x$; выясните, при каких a полученное уравнение имеет два различных корня, больших 1.

4. 3. Указание. Пусть $BE = x$, $AD = y$; тогда $FD = x$, $EF = x/2$ и по теореме Пифагора $AE^2 = 4 - x^2 = y^2 - \frac{9x^2}{4}$. По теореме косинусов для треугольника ABD получим $\frac{25}{4}x^2 = 4 + y^2 - 2\sqrt{2}\,y$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 4 + \dfrac{5x^2}{4}, \\ \dfrac{25x^2}{4} = 4 + y^2 - 2\sqrt{2}\,y, \end{cases}$$

решая которую, получим $x = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $y = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, после чего площадь параллелограмма находится без труда.

5. $10\pi\sqrt{3}$. Решение. Пусть D — середина ребра AB, $HS = h$ — высота пирамиды, O — центр основания конуса. Рассмотрим три попарно перпендикулярных вектора длины 1:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB},\ \vec{e}_2 = \frac{1}{4\sqrt{3}}\overrightarrow{DC},\ \vec{e}_3 = \frac{1}{h}\overrightarrow{HS}.$$

Тогда любой вектор a можно разложить по векторам e_1, e_2, e_3: $a = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. Мы будем для сокращения писать $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Кроме того, положим $\vec{CO} = x\vec{CS}$. Тогда

$\vec{DK} = (3;\ 0;\ 0)$; $\vec{DL} = (-2;\ 2\sqrt{3};\ 0)$;

$$\vec{DO} = \vec{DC} + x\vec{CS} = \vec{DC} + x(\vec{CH} + \vec{HS}) = \left(0;\ 4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3}x;\ xh\right);$$

$$\vec{KQ} = \left(-3;\ 4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3}x;\ xh\right);$$

$$\vec{LO} = \left(2;\ 2\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3}x;\ xh\right).$$

Поскольку высота конуса перпендикулярна плоскости его основания, имеем $\vec{KO}\cdot\vec{LO} = 0$, то есть

$$x^2\left(h^2 + \frac{64}{3}\right) - 48x + 18 = 0. \qquad (1)$$

Условие единственности конуса означает, что уравнение (1) имеет единственное решение, то есть дискриминант его равен нулю:

$$24^2 - 18\left(h^2 + \frac{64}{3}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$h = 4\sqrt{\frac{2}{3}};\ x = \frac{24}{h^2 + \frac{64}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Объем конуса находим по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi|\vec{KO}|\cdot|\vec{LO}|^2 = 10\sqrt{3}\pi.$$

Вариант 2

1. $x = \frac{1}{25}$.

2. $S = \frac{15}{4}$.

3. $$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{n\pi}{4} + 2k\pi, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{48} + \dfrac{n\pi}{8} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \mp\dfrac{1}{6}\left(\pi - \arccos\dfrac{4}{5}\right) - \dfrac{n\pi}{3} + (2k+1)\pi, \\ y = \pm\dfrac{1}{12}\left(\pi - \arccos\dfrac{4}{5}\right) + \dfrac{n\pi}{6}, \quad n, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

4. $\varphi = 45°$.

5. а) $S = 3{,}16 = \frac{79}{25}$.

б) $p \in \left]-\frac{7}{2};\ -3\right[\cup \left]\frac{7}{6};\ +\infty\right[$.

Система не имеет решений тогда и только тогда, когда $(3+p)b^2 < (p-1)a^2$.

При $p > 1$: $M = \left\{(a;\ b): a + b > 1,\ b > 3a - 2p,\ b < \sqrt{\frac{p-1}{p+3}}\,a\right\}$.

M — внутренняя область многоугольника при $p > \frac{7}{6}$.

При $p < -3$: $M = \left\{(a;\ b): a + b > 1,\ b < 3a - 2p,\ b > \sqrt{\frac{p-1}{p-3}}\,a\right\}$.

M — внутренняя область многоугольника при $-\frac{7}{2} < p < -3$.

Физика

Вариант 1

1. Колебания чашки весов массой m_1 происходят относительно положения равновесия, в котором удлинение пружины Δx_0 определяется условием

$$m_1 g = k\Delta x_0,$$

где g — ускорение свободного падения, k — жесткость пружины. В крайнем нижнем положении на чашку весов действует (по закону Гука) со стороны пружины сила упругости $k(\Delta x_0 + A)$, скорость движения чашки весов в этот момент равна нулю. Если в этот момент на чашку положить перегрузок массой m_2, такой, чтобы сила тяжести чашки с перегрузком была равна силе упругости, то, очевидно, колебания прекратятся. Таким образом,

$$(m_1 + m_2)g = k(\Delta x_0 + A).$$

Приведенные равенства позволяют найти жесткость пружины: $k = m_2 g/A$, откуда для первоначального периода T колебаний чашки весов получаем

$$T = 2\pi\sqrt{m_1/k} = 2\pi\sqrt{(m_1 A)/(m_2 g)}.$$

При решении этой задачи многие абитуриенты сделали характерную ошибку, забыв, что колебания совершаются относительно статического положения равновесия, и жесткость пружины находили из условия $(m_1 + m_2)g = kA$.

2. После открытия вентиля происходит процесс перемешивания газов, в результате которого в баллонах установятся одинаковое давление p_0 и температура T_0. Давление смеси газов (по закону Дальтона) определяется суммой парциальных давлений компонентов, а температура смеси определяется законом сохранения внутренней энергии системы. Таким образом, имели

$$p_0=(\nu_1+\nu_2)RT_0/(V_1+V_2),$$
$$\nu_1C_1T_1+\nu_2C_2T_2=(\nu_1C_1+\nu_2C_2)T_0,$$

где $\nu_1=m_1/M_1$ и $\nu_2=m_2/M_2$ — число молей азота и аргона соответственно. Начальные температуры газов T_1 и T_2 найдем из уравнений состояния:

$$T_1=p_1V_1/(R\nu_1),\quad T_2=p_2V_2/(R\nu_2).$$

Тогда окончательно получаем

$$T_0=\frac{C_1p_1V_1+C_2p_2V_2}{R(\nu_1C_1+\nu_2C_2)}\approx 306\ \text{К},$$

$$p_0=(\nu_1+\nu_2)\frac{RT_0}{V_1+V_2}\approx 2{,}1\cdot 10^6\ \text{Па}.$$

3. Приведем подробный анализ решения этой задачи, хотя возможны и более краткие решения. Докажем сначала, что контакт, движущийся под действием силы тяжести и силы Ампера, будет совершать колебания около некоторого положения равновесия. Выберем положительное направление оси координат вниз (по направлению силы тяжести), а положительное направление обхода контура, образованного катушкой, рельсами и контактом, — против часовой стрелки (рис. 1). Пусть в данный момент контакт движется вниз со скоростью v, ток I в контуре течет в положительном направлении, а магнитное поле $\vec{B}$ перпендикулярно плоскости рисунка и направлено от нас. Запишем уравнение движения контакта:

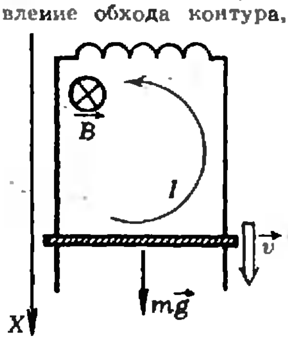


Рис. 1.

$$mv'=mg-IBl,$$

где v' обозначает производную по времени от скорости, то есть ускорение контакта (при выбранном направлении тока в контуре сила Ампера по правилу левой руки тормозит движение контакта). При движении контакта меняется магнитный поток $\Phi=Blx$, пронизывающий замкнутый контур, и возникает ЭДС индукции $\mathscr{E}=-\Phi'$, которая уравновешивается ЭДС самоиндукции $-LI'$, возникающей в катушке:

$$\mathscr{E}-LI'=0.$$

Когда контакт движется вниз, магнитный поток через контур увеличивается и возникающая в контуре ЭДС вызывает появление в контуре тока, препятствующего увеличению потока, то есть тормозящего движение контакта. При выбранном направлении обхода контура это означает, что в закон Ома эта ЭДС входит с положительным знаком. Так как $|\mathscr{E}|=|\Phi'|=Blx'=Blv$, закон Ома в нашем случае имеет вид

$$Blv-LI'=0.$$

Продифференцировав по времени уравнение движения контакта и подставив I из предыдущего равенства, имеем окончательно

$$v''+\frac{B^2l^2}{mL}v=0.$$

Мы получили относительно скорости контакта v уравнение колебаний и, следовательно, доказали, что движение контакта носит колебательный характер. Это дифференциальное уравнение мы решать не будем, а воспользуемся законом сохранения энергии.

Пусть к данному моменту контакт опустился вниз на x, имеет скорость v, и ток в контуре равен I. По закону сохранения энергии потенциальная энергия контакта превращается в его кинетическую и запасается в катушке индуктивности в виде энергии магнитного поля:

$$mgx=mv^2/2+LI^2/2.$$

Скорость контакта максимальна в положении равновесия x_0, когда сила тяжести уравновешена силой Ампера:

$$mg=BlI_0.$$

Из закона Ома следует, что ток в контуре пропорционален смещению контакта, поэтому

$$Blx_0=I_0L,$$

и работу силы тяжести до положения равновесия можно записать так:

$$mgx_0=mg\frac{I_0L}{Bl}=L\left(\frac{mg}{Bl}\right)^2.$$

Таким образом, закон сохранения энергии дает

$$L\left(\frac{mg}{Bl}\right)^2=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{L}{2}\left(\frac{mg}{Bl}\right)^2,$$

и окончательно

$$B=g\frac{\sqrt{mL}}{v_0l}.$$

При решении этой достаточно сложной задачи многие абитуриенты сделали физическую ошибку, считая, что кинетическая энергия контакта набирается за счет работы сила Ампера, а не силы тяжести. На самом деле половина работы силы тяжести превратилась в кинетическую энергию контакта, а другая ее половина перешла в энергию магнитного поля в катушке индуктивности.

4. При сложении двух одинаковых линз их оптическая сила увеличивается вдвое. Так как при неизменном расстоянии до предмета размер изображения (то есть увеличение) остается одинаковым для одной и двух линз, то неизбежно должен поменяться характер изображе-

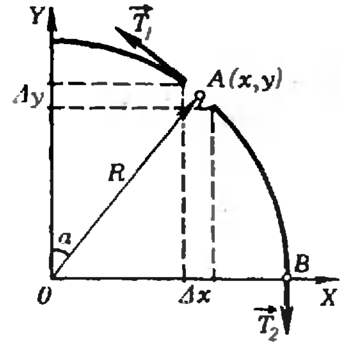


Рис. 2.

ния: сначала оно было мнимым, а потом стало действительным. Запишем формулу линзы и найдем увеличение в первом и во втором случаях соответственно:

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F},\quad \Gamma_1=\frac{f_1}{d}=\frac{F}{F-d},$$

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f_2}=\frac{2}{F},\quad \Gamma_2=\frac{f_2}{d}=\frac{F/2}{d-F/2}.$$

По условию $\Gamma_1=\Gamma_2$, откуда находим

$$3d=2F \text{ и } \Gamma_1=\Gamma_2=3.$$

Вариант 2

1. Рассмотрим кусочек каната длиной Δl (рис. 2), находящийся в точке A с координатами (x, y). Момент силы тяжести относительно точки O равен $\Delta M=(m/l)\,g\Delta l x=(m/l)\,g\Delta l R\sin\alpha=(m/l)\,gR\Delta y$. Следовательно, момент силы тяжести куска каната AB относительно точки O равен $M_{AB}=(m/l)\,gRy$ и условие его равновесия имеет вид

$$T_1R=T_2R+M_{AB}=T_2R+(m/l)\,gyR,$$

где T_1 и T_2 — натяжение каната в точках A и B соответственно. Из последнего равенства видно, что $T_{1\,max}=T_2+(m/l)\,gR$. Так как $2T_2=(m/l)\,g\,(l-\pi R)$, то

$$T_{1\,max}=\frac{m}{l}\,g\,\frac{l+(2-\pi)R}{2}.$$

2. По закону Архимеда вес шара mg численно равен выталкивающей силе: $mg=(\rho_{сн}-\rho_{вн})\,Vg$, где $\rho_{сн}$ и $\rho_{вн}$ — плотность воздуха снаружи и внутри оболочки объема $V=\pi D^3/6$. С помощью уравнения состояния $p=\rho RT/M$ находим

$$m=\frac{pVM}{R}\left(\frac{1}{T_{сн}}-\frac{1}{T_{вн}}\right).$$

Отсюда получаем, что температура внутри шара

$$T_{вн}\approx 316\ К\approx 43\ ^\circ C.$$

3. Заряды $+q$ и $-q$ на пластинах создают поле, равное и противоположное внешнему: $q=\varepsilon_0 SE_0$. Сила, действующая на одну из пластин, определяется внешним полем и полем другой пластины:

$$F=\left(E_0-\frac{E_0}{2}\right)q.$$

Работа против этой силы равна

$$A=F\,\frac{d}{2}=\frac{1}{4}\,\varepsilon_0 SdE_0^2.$$

4. Из формулы линзы, записанной для объектива с кольцом и без кольца:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}\ \text{и}\ \frac{1}{d'}+\frac{1}{f-a}=\frac{1}{F},$$

найдем

$$d'=101\ м.$$

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $x=1-2p$ при $p<0$; $x=0$ при $p=0$; $x_1=0$, $x_2=1-2p$ при $0<x\leqslant\frac{3}{4}$; $x=0$ при $p>\frac{3}{4}$.

Указание. Уравнение равносильно системе

$$x^2+x+\frac{p^2}{(x-1)^2}=x^2-\frac{2px}{x-1}+\frac{p^2}{(x-1)^2},$$

$$x\geqslant\frac{p}{x-1}.$$

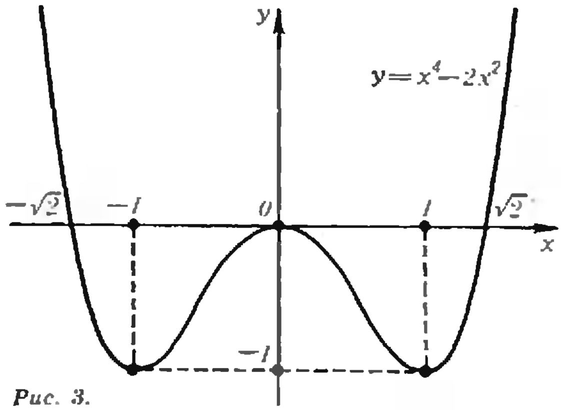


Рис. 3.

Решая уравнение, находим $x_1=1-2p$, $x_2=0$. Подставляя x_1 и x_2 в неравенство, получаем ответ.

2. $x=\arcsin 1/9+(2k+1)\pi$.

3. $\sqrt{a^2+b^2-ab}$.

4. Функция возрастает при $x\in\,]2;3[$, убывает при $x\in\,]3;+\infty[$. $y_{max}=y(3)=4$.

5. $\{3/4\}$. Указание. Из корней уравнения $12x^2-25x+12=0$ условию $\operatorname{ctg}x>x$ удовлетворяет лишь $x=\frac{3}{4}$, так как $\operatorname{ctg}\frac{4}{3}<\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1<\frac{4}{3}$.

Вариант 2

1. $\left\{0;\ \frac{3}{4}a\right\}$ при $a>0$, $[-\infty;0]$ при $a=0$; $\varnothing$ при $a<0$.

2. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$ при $a\neq\pm\sqrt{2}$; $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$ при $a=-\sqrt{2}$, $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi l$ при $a=\sqrt{2}$. На промежутке $[20\pi;29\pi]$ уравнение имеет 9 корней, если $a\neq\pm\sqrt{2}$; 5 корней, если $a=-\sqrt{2}$, и 4 корня, если $a=\sqrt{2}$.

3. $S=a^2(3+\sqrt{3})/2$.

4. График функции показан на рисунке 3. Ось симметрии существует при $a\in\{-2;0;2\}$. Указание. Для существования вертикальной оси симметрии $x=\alpha$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x-\alpha)$ была четной, т. е. чтобы при всех x было $f(-x-\alpha)=f(x-\alpha)$. В нашем случае это значит, что коэффициенты многочлена $f(x-\alpha)=(x-\alpha)^4+2a(x-\alpha)^3-2(x-\alpha)^2-6a(x-\alpha)$ при нечетных степенях x равны нулю.

5. $a=3$; $a=2$; $a>4$. Указание. Выполнив замену $y=\sin x$, получим $y=2y^2$, откуда либо $y=0$, либо $y=\frac{1}{2}$. Второе уравнение принимает вид $y(4y^2-2|a-1|y+a-2)=0$; $y=0$ является корнем этого уравнения. Подставляя $y=\frac{1}{2}$, получим $1-|a-1|+a-2=0$ или $|a-1|=a-1$, откуда $a\geqslant 1$. Итак, все решения первого уравнения удовлетворяют второму при $a\geqslant 1$. При таких a получаем уравнение $y(4y^2-2(a-1)y+a-2)=0$, корни которого 0, 1/2 и $(a-2)/2$. Корень $(a-2)/2$ удовлетворяет первому уравнению, если $(a-2)/2=0$, $(a-2)/2=1/2$, то есть при $a=2$ и $a=3$. Кроме того, при $\left|\frac{a-2}{2}\right|>1$ уравнение $\sin x=\frac{a-2}{2}$ корней не имеет, и следовательно, все решения второго уравнения удовлетворяют первому уравнению.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. $\frac{2}{3}a^3 \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos^2\beta$. 2. $]5;\ 56[$.

3. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k\ (k\in Z)$.

4. $\max\limits_{[-1;\,3]} f(x)=f(0)=0$, $\min\limits_{[-1;\,3]} f(x)=f(3)=-27$.

Вариант 2

1. $\frac{a^3}{8\sin\frac{\beta}{2}}\sqrt{3-12\sin^2\frac{\beta}{2}}$.

2. $]-9;\ -2/5[\cup]3;\ +\infty[$.
3. $\{-1;\ 0\}$.
4. $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\ (k, n\in Z)$.
5. $\max\limits_{[-6;\,0]} y(x)=y(-3)=0$,

$\min\limits_{[-6;\,0]} y(x)=y(0)=-\frac{9}{4}$.

Физика

1. $h=\frac{g}{2}\left(\frac{l}{g\Delta t}-\frac{\Delta t}{2}\right)^2\approx 180$ м (здесь $g=9{,}8$ м/с^2, $\Delta t=1$ с).
2. $\mu=h/(a+l)=0{,}05$.
3. $p=np_0V_0/V=2\cdot 10^5$ Па.
4. $t=\frac{rm_2+c_1(m_1t_1+m_2t_2)}{c_1(m_1+m_2)}\approx 77$ °С.
5. $P_2/P_1=2(R+r)^2/(2R+r)^2=0{,}53$.
6. $Q_1=U^2\tau/(R_1+R_2)\approx 106{,}6$ кДж; $Q_2=U^2\tau(R_1+R_2)/(R_1R_2)=432$ кДж.
7. $\beta=\arcsin(\sin\alpha\cdot n_в/n_{ст})\approx 28°$.
8. $\lambda=\frac{hc}{A+mv^2/2}\approx 7\cdot 10^{-8}$ м (здесь $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме).

XVII Международная физическая олимпиада

(см. «Квант», 1986, № 12)

Решения задач подготовили члены нашей команды: А. Гущин (теоретическая задача № 1), А. Матыцин (теоретическая задача № 2), О. Волков (теоретическая задача № 3), С. Мягчилов (экспериментальная задача № 1), Г. Николашвили (экспериментальная задача № 2).

Теоретический тур

Задача 1

1) Разность хода двух волн, выходящих из щелей L и M, равна $d\sin\theta$, следовательно, разность фаз $\Delta\varphi=(2\pi d\sin\theta)/\lambda$. Складывая колебания, получаем

$$y=a\cos(2\pi\nu t-2\pi x/\lambda)+$$
$$+a\cos(2\pi\nu t-2\pi x/\lambda+\Delta\varphi)=$$
$$=2a\cos(\Delta\varphi/2)\cos(2\pi\nu t-2\pi x/\lambda+\Delta\varphi/2).$$

Если обозначить $\Delta\varphi/2=\beta$, то результирующая амплитуда $A=2a\cos\beta$. Векторная диаграмма изображена на рисунке 4.

2) Сложим колебания от N щелей с помощью векторной диаграммы (рис. 5). Все стороны полученного многоугольника равны a, углы между сторонами равны $(\pi-2\beta)$, следовательно, около многоугольника можно описать окружность радиусом R. Нетрудно показать геометрически, что

$$R=a/(2\sin\beta)\ \text{и}\ A=a(\sin N\beta/\sin\beta).$$

Разность фаз между исходной и результирующей волнами определяется углом α:

$$\alpha=(\pi/2-\beta)-(\pi/2-N\beta)=(N-1)\beta.$$

3) Построим графики $\sin N\beta$ и $1/\sin\beta$ как функцию β в одном масштабе при $N=8$ (рис. 6). Учитывая, что интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды, построим график $I=I_0\sin^2 N\beta/\sin^2\beta$ (I_0 — интенсивность излучения от одной цели) для $N=8$ (рис. 7).

4) В главных максимумах векторная диаграмма представляет собой прямую линию. При этом $2\beta=2\pi n$, где $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ Амплитуда результирующей волны равна Na, а интенсивность $I=N^2I_0$.

5) Условие главных максимумов:

$$\beta=\pi n,\ \text{или}\ (\pi d\sin\theta)/\lambda=\pi n,$$

где $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ Так как $|\sin\theta|\leqslant 1$, число главных максимумов не превышает $2d/\lambda+1$.

6) Дифференцируя условие главных максимумов по θ, получаем

$$\lambda'(\theta)=(d\cos\theta)/n.$$

Следовательно, при $\Delta\lambda\ll\lambda$

$$\Delta\lambda=(d\cos\theta\ \Delta\theta)/n,$$
$$\Delta\theta=n\ \Delta\lambda/(d\sqrt{1-(n\lambda/d)^2}).$$

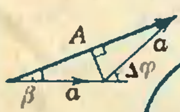


Рис. 4.

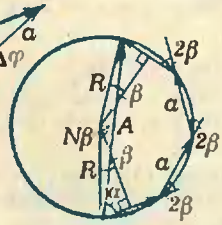


Рис. 5.

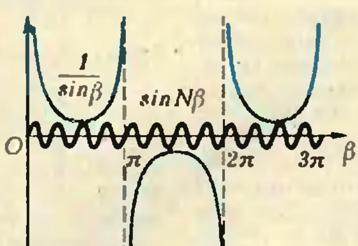


Рис. 6.

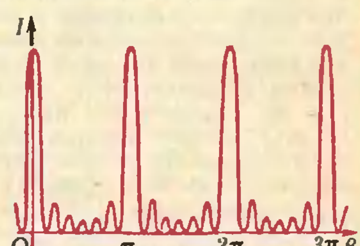


Рис. 7.

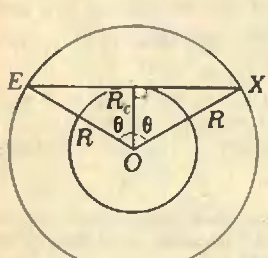


Рис. 8.

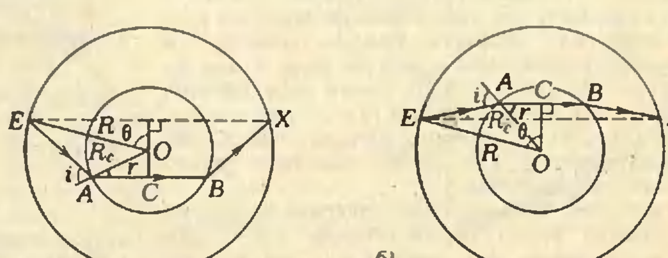


Рис. 9.

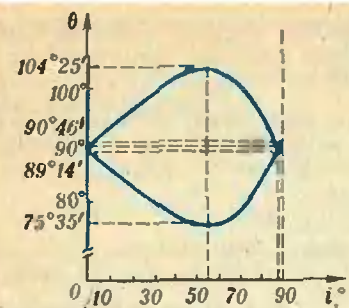


Рис. 10.

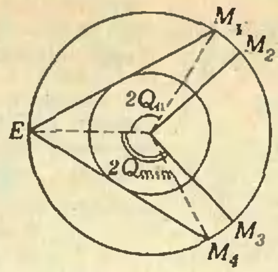


Рис. 11.

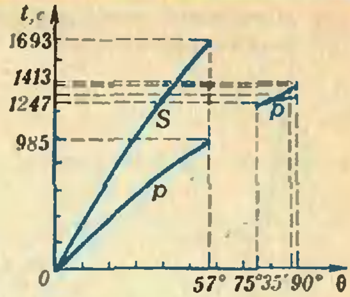


Рис. 12.

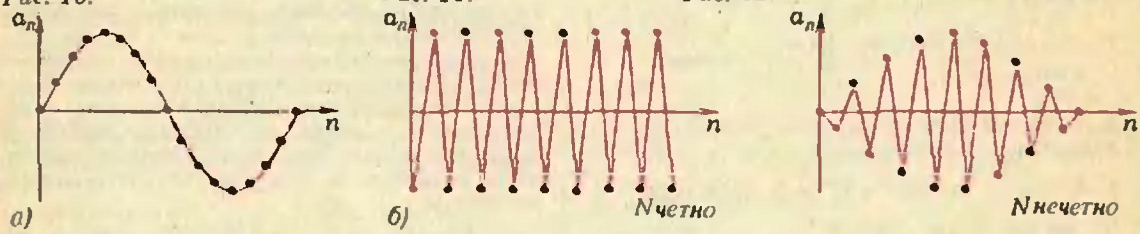


Рис. 13.

Подставляя $\lambda=589{,}0$ нм, $\Delta\lambda=0{,}6$ нм, $n=2$ и $d=1{,}2\cdot10^{-6}$ м, получаем

$$\Delta\theta=5{,}2\cdot10^{-3}\ \text{рад}=0{,}3^\circ.$$

Задача 2

1) Прямолинейное распространение волн возможно, если отрезок EX весь лежит в оболочке (рис. 8). При этом время распространения волн, имеющих скорость v, равно

$$t=EX/v=(2R\sin\theta)/v \quad \text{для} \quad \theta\leqslant\arccos(R_я/R).$$

2) Возможные пути волн p в случае $\theta>\arccos(R_я/R)$ показаны на рисунке 9, а) и б) (в обоих случаях $AB\parallel EX$). Если i — угол падения волны на границу «ядро — оболочка», а r — угол преломления, то по закону преломления $\sin i/\sin r=v_p/v_{яp}$. Тогда из треугольника AOE по теореме синусов для угла θ получим: в случае а)

$$\theta=90^\circ-i+(\arcsin(v_{яp}\sin i/v_p)+\arcsin(R_я\sin i/R)),$$

в случае б)

$$\theta=90^\circ+i-(\arcsin(v_{яp}\sin i/v_p)+\arcsin(R_я\sin i/R))$$

(i может меняться от 0 до 90°).

3) Графики зависимости θ от i приведены на рисунке 10 (для каждого значения i мы имеем два возможных значения θ). Видим, что существуют минимальное и максимальное значения θ: $\theta_{min}=75^\circ35'$ и $\theta_{max}=104^\circ25'$ при $i=55^\circ$. Поэтому преломленные волны смогут зарегистрировать только наблюдатели, находящиеся в зоне M_2M_3 (рис. 11), а «прямые» волны — на участках M_1E и EM_4. Так как $\theta_0=\arccos(R_я/R)=57^\circ<\theta_{min}=75^\circ35'$, существуют зоны ($M_3M_4$ и M_1M_2), где землетрясение чувствуется очень слабо — туда волны могут дойти только после отражения от одной из границ ядра или оболочки. График зависимости времени пробега волн p и S от угла θ дан на рисунке 12. Для $0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$ время определяется выражением $t=(2R\sin\theta)/v$ ($v=v_p$ или $v=v_S$), в зону $\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_{min}$ волны практически не попадают, в зону $\theta_{min}\leqslant\theta\leqslant90^\circ$ попадают только преломленные волны.

4) Учитывая, что время распространения волны по прямой равно $t=(2R\sin\theta)/v$ ($v=v_p$ или $v=v_S$), получим, что задержка волны S равна

$$\Delta t_{12}=t_S-t_p=2R(1/v_S-1/v_p)\sin\theta \quad (v_S<v_p).$$

Отсюда угловое расстояние

$$E\hat{O}X=2\theta=2\arcsin(v_Sv_p\Delta t/(2R(v_p-v_S)))\approx17{,}84^\circ.$$

Это соответствует $\theta=8{,}92^\circ<\theta_0=57^\circ$, то есть волны действительно доходят до наблюдателя без преломления.

5) Два последних отсчета вызваны отражениями волн на границе между оболочкой и ядром. Промежуток времени между этими отсчетами

$$\Delta t_{34}=2(v_p-v_S)\sqrt{R^2+R_я^2-2RR_я\cos\theta}/(v_pv_S).$$

Подставив $\theta=8{,}92^\circ$, находим $\Delta t_{34}\approx396{,}7$ с $\approx$ 6 мин 37 с, т. е. наше предположение подтверждается.

Задача 3*)

1) Запишем основное уравнение динамики вращательного движения для n-й частицы:

$$kR((u_{n-1}-u_n)+(u_{n+1}-u_n))=I\ddot{u}_n/R,$$

где R — радиус окружности, $I=mR^2$ — момент инерции частицы, $\ddot{u}_n=\frac{d^2u_n}{dt^2}$, или

$$\ddot{u}_n=\omega_0^2(u_{n-1}+u_{n+1}-2u_n). \qquad (1)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1&=\omega_0^2(u_3+u_2-2u_1),\\ \ddot{u}_2&=\omega_0^2(u_1+u_3-2u_2),\\ \ddot{u}_3&=\omega_0^2(u_2+u_1-2u_3),\end{aligned} \qquad (2)$$

где $\omega_0^2=k/m$.

2) Система уравнений (2) имеет решением суперпозицию гармонических колебаний — нормальных мод. Для их нахождения подставим в систему уравнения гармонических колебаний

$$u_1=a_1\cos\omega t,\quad u_2=a_2\cos\omega t,\quad u_3=a_3\cos\omega t,$$

сложим все уравнения системы и получим

$$\omega^2(a_1+a_2+a_3)=0.$$

Отсюда следует: а) $\omega=0$; б) $a_1+a_2+a_3=0$, что соответствует значению частоты $\omega=\sqrt{3}\,\omega_0$.

3) Прямой подстановкой нетрудно убедиться,

---

*) Решение этой задачи несколько выходит за рамки программы по физике для нашей средней школы. (Примеч. ред.)

что функция

$$u_n(t)=a_n\sin(2\pi ns/N+\varphi)\cos\omega_s t$$

действительно удовлетворяет уравнению (1) при условии, что $\omega_s=2\omega_0\sin(\pi s/N)$. Из последнего равенства следует, что $0<\omega_s\leqslant 2\omega_0$ (при $N\to\infty$). Это соответствует диапазону $1\leqslant s\leqslant N/2$.

4 а) Для низких частот

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{\sin(2ns\pi/N+\varphi)}{\sin(2(n+1)s\pi/N+\varphi)}=$$

$$=\frac{1}{1+2\pi s/N\operatorname{ctg}(2ns\pi/N+\varphi)}.$$

При этом чаще всего

$$u_n/u_{n+1}\approx 1.$$

4 б) Для максимальных частот $\omega=\omega_{max}=2\omega_0$, соответствующих $s=N/2$,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{\sin(\pi n+\varphi)}{\sin(\pi(n+1)+\varphi)}=-1.$$

Распределение амплитуд в цепи показано на рисунке 13.

5) Если $m'\ll m$, то можно считать, что колебания маленькой частицы происходят между соседними неподвижными частицами с массой m. Собственная частота таких колебаний определяется из уравнения $m'\ddot{x}=-2kx$:

$$\omega'=\sqrt{2k/m'}\approx\omega_0\sqrt{2m/m'}\gg\omega_{max}.$$

Экспериментальный тур

Задача 1

Ход лучей, с помощью которых образуются радуги первого, второго и пятого порядков, представлены на рисунке 14. Наблюдая каплю через зрительную трубу, при определенных углах можно заметить на капле яркую точку, которая меняет окраску при небольших смещениях зрительной трубы. Это и есть радуга. Как видно из рисунка 14, радуга первого и пятого порядков видна с правой стороны капли, а радуга второго порядка — с левой стороны. Результаты наблюдения и расчетов для капли воды представлены на рисунках 15 и 16.

Экстраполируя последний график до значения $n=2$, получаем значение $\varphi=304°\pm25°$. Полученные экспериментальным путем результаты можно проверить теоретически. Обозначив через i угол падения луча на каплю, а через r угол преломления, выразим угол поворота луча φ:

$$\varphi=k(\pi-2r)+2(i-r),$$

где $k(\pi-2r)$ — угол поворота в результате k отражений, $2(i-r)$ — угол поворота в результате двух преломлений. Подставив в полученную формулу значение $r=\arcsin(\sin i/n)$, получим

$$\varphi(i)=k\pi-2r(k+1)+2i=$$

$$=k\pi-2(k+1)\arcsin(\sin i/n)+2i.$$

При этом существует такой угол φ, для которого лучи, вышедшие из капли, идут параллельным пучком, не рассеиваясь. Под этим углом и будет видна радуга. Итак, условие наблюдения радуги $\varphi'(i)=0$, откуда после преобразования получим

$$\cos i=\sqrt{\frac{n^2-1}{k^2+2k}}.$$

Заметим, что теоретические результаты хоро-

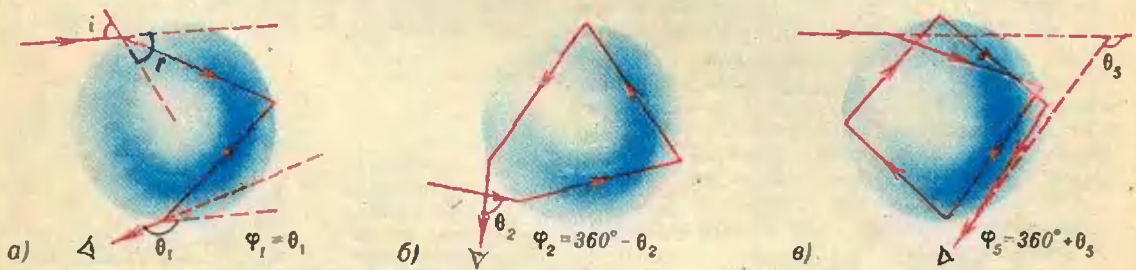


Рис. 14.

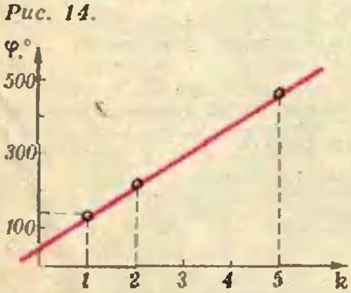


Рис. 15.

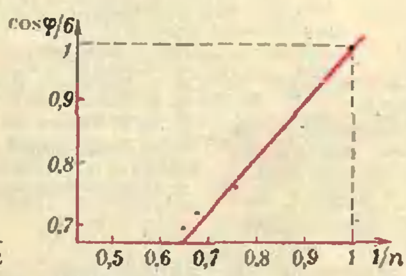


Рис. 16.

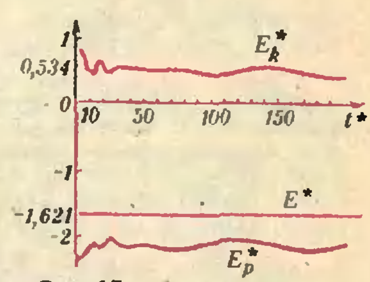


Рис. 17.

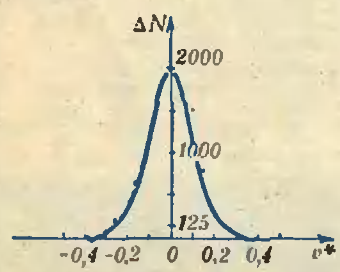


Рис. 18.

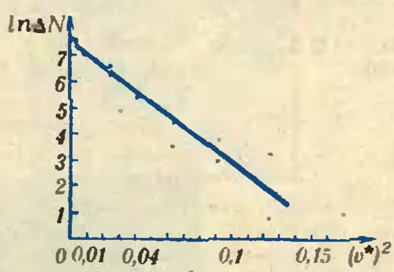


Рис. 19.

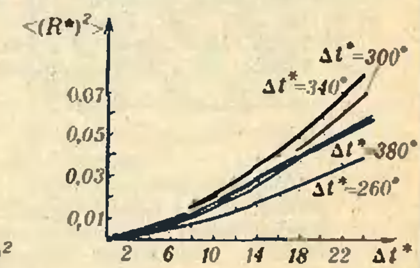


Рис. 20.

що совпадают с экспериментальными. Правда, если построить теоретический график зависимости $\cos\varphi/6$ от $1/n$, то точки не лягут точно на прямую. Очевидно, функция $\cos\varphi/6$ — лишь удачно подобранная зависимость от $1/n$, с помощью которой можно приближенно находить угол φ.

Задача 2

1) С помощью соответствующих клавиш на дисплей ЭВМ выводились значения проекций скоростей частиц для данной последовательности времен. Затем вычислялись проекции импульса системы на оси OX и OY. По их значениям можно заключить, что импульс системы сохраняется.

2)—4) Графики зависимости кинетической энергии E_k^*, потенциальной E_p^* и полной E^* от времени t^* представлены на рисунке 17. Как видно, полная энергия постоянна и равна $-1{,}621\pm0{,}1$.

5) Среднее значение кинетической энергии и время установления термодинамического равновесия определяются из графиков на рисунке 17 ($E^*_{k\,ср}=0{,}53\pm0{,}06$; $\Delta t^*=10-20$).

6) На экран выводилась таблица зависимости ΔN от v^* для $\Delta t^*>20$ и по этим данным строилась гистограмма (рис. 18). Так как $\Delta N=Ae^{-24(v^*)^2/a}$, то

$$\ln\Delta N=\ln A-24\,(v^*)^2/a,$$

и графически зависимость $\ln\Delta N$ от $(v^*)^2$ должна представлять прямую. Построив график по экспериментальным точкам, видим, что это действительно прямая (рис. 19). По наклону графика определяется коэффициент a: $a=0{,}503\pm0{,}002$.

7) Далее на дисплей выводились таблицы зависимости $\langle(R^*)^2\rangle$ от Δt^* для начальных моментов времени и строились соответствующие графики, а также график зависимости $\langle\overline{(R^*)^2}\rangle$ от Δt^* (рис. 20). По этим графикам вычисляют градиент функции в линейной области: он изменяется в пределах от 0,027 до 0,047. Для усредненного графика градиент линейной его части равен $0{,}035\pm0{,}01$. Как видно из графика, $\langle(R^*)^2\rangle$ пропорционален времени, т. е. данная компьютером модель — это модель вещества в жидком состоянии.

Шахматная страничка
(см. «Квант», 1986, № 10)

Обе задачи принадлежат выдающемуся советскому проблемисту Л. Куббелю.

Задание 19. 1. Фа8! Ферзь становится в засаде за пешками — красивое вступление. 1...b6 (b5, bа) 2. Фh1+ Cg1 3. Cd4! и 4. Kd1+! C:d4×, 1...Cg1 (1...g2 2. Ka4+ C:e5×) 2. ab+ Ca7 3. Cd4! и 4. Ka4+! C:d4×. Два изящных эхо-варианта.

Задание 20. 1. Kb2. Теперь возникают два симпатичных варианта: 1...a4 2. Kc4 a3 3. Kpd8 a2 4. Лc8 a1Ф 5. Ф:a1 C:g5+ 6. Фf6+! C:f6×, 1...c4 2. Ka4 c3 3. Kpb8 c2 4. c8C! c1Ф 5. Ф:c1 C:g5 6. Фf4! C:f4×. Два эхо-мата.

Сдано в набор 20.11.86. Подписано к печати 26.12.86
Т-23999. Бумага 70×108/16
Печать офсетная. Усл. кр.-от. 23,8
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,01
Тираж 202 453 экз. Цена 40 коп. Заказ 3169

Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли

142300 г. Чехов Московской области

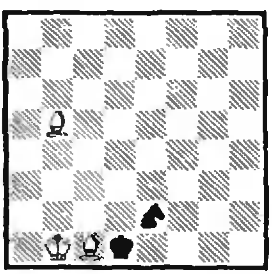
103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

КОМПЬЮТЕР АНАЛИЗИРУЕТ ЭНДШПИЛЬ

В прошлом году мы рассказывали о новых достижениях ЭВМ в исследовании шахматных окончаний. В № 2 сообщалось о том, что компьютер досконально проанализировал весьма сложное окончание «король и два разноцветных слона против короля и коня». До недавних пор оно считалось ничейным, но ЭВМ доказала, что оно выиграно для сильнейшей стороны, причем в рекордной позиции, когда обе стороны играют наилучшим образом, два слона справляются с конем лишь за 67 ходов. Еще один серьезный удар по правилу 50 ходов!

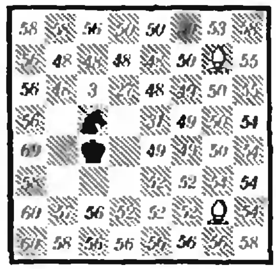


Приведем основной вариант, указанный программой, которую написал О. Комэй. **1. Ca4+ Kpe1 2. Cb2 Kpd2 3. Kpa1 Kc3 4. Cc6 Kpc2 5. Ca3 Kpb3 6. Cf8 Kpc2 7. Cg7 Kpb3 8. Ce8 Kpc2 9. Cg6+ Kpb3 10. Ch7 Kpc4 11. Kpb2 Ke2 12. Kpc2 Kd4+ 13. Kpd2 Kpd5 14. Kpe3 Ke6 15. Cf6 Kc5 16. Cg8+ Kpd6 17. Ca2 Kd7 18. Cg7 Kc5 19. Cf8+ Kpc6 20. Kpd4 Kb7 21. Ce7 Kpb6 22. Cf6 Kpc6 23. Cd5+ Kpb6 24. Ce4 Kpa7 25. Kpc3 Kpa6 26. Kpb4 Kpb6 27. Cg5 Kpc7 28. Cf4+ Kpb6 29. Cg3 Kd8 30. Cf2+ Kpc7 31. Kpb5 Kpd6 32. Cg3+ Kpe6 33. Ce2 Kf7 34. Cb3+ Kpf6 35. Ch4+ Kpg6 36. Kpc5 Kg5 37. Cc2+ Kph5 38. Cg3 Kpg4 39. Cd6 Kpf3 40. Kpd4 Kpf2 41. Kpd3 Kf3 42. Cc5+ Kpg3 43. Kpe3 Kh4 44. Cd6+ Kpg4 45. Kpe4 Kf5 46. Cc5 Kh4 47. Cf2 Kg6 48. Cb3 Kpg5 49. Cb6 Kf8 50. Cd8+ Kpg6 51. Kpd5 Kpf7 52. Kpd6+ Kpg7 53. Kpe7 Kg6+ 54. Kpe6 Kf8+ 55. Kpf5 Kd7 56. Ce7 Kf8 57. Cf6+ Kph6 58. Ch8 Kph7 59. Cd4 Kph6 60. Cf7 Kh7 61. Ce8 Kf8 62. Kpf6 Kh7+ 63. Kpf7 Kg5+ 64. Kpg8 Kf3 65. Ce3+ Kg5 66. Kpf8 Kph7 67. C:g5**, и черный конь погиб.

К. Томпсон, автор программы «Белл», третьей чемпионки мира среди ЭВМ, в последние годы разработал много машинных программ для анализа тех или иных окончаний. Для эндшпиля с двумя слонами против коня его программа немного не дотянула до рекорда (66 ходов), зато проделала серьезную аналитическую работу и определила характерные выигранные положения, а также девять классов позиций, в которых (вопреки общему правилу) сильнейшая сторона не может избежать размена одного из слонов на коня или дело кончается вечным шахом (разумеется, позиции, где черные первым же ходом берут слона, не в счет).

Таким образом, мы имеем здесь первый образец компьютерной программы, которая не только умеет оценивать окончания достаточно сложного типа, но и создала определенную классификацию эндшпилей, полезную для теории.

Итак, в борьбе двух слонов против коня ничья достигается в редких случаях. При помощи ЭВМ Томпсон составил таблицы с четырьмя фиксированными фигурами, а пятая — белый король — может занимать любое поле.

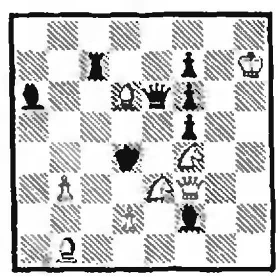


При расположении короля на произвольном доступном ему поле белые, начиная, выигрывают. А сколько для этого требуется ходов, указано непосредственно на каждом поле. Видно, что здесь выигрыш более чем в 50 ходов скорее не исключение, а правило.

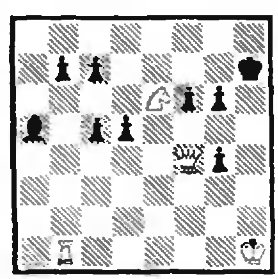
Раньше в шахматном кодексе в правиле 50 ходов оговаривалось, что для позиций, где такого числа недостаточно, его надо соответственно увеличить. Однако этим пунктом никто ни разу не воспользовался, и в дальнейшем его отменили. Взамен в кодексе были сделаны исключения для трех видов окончаний. Теперь, когда компьютеры добились столь внушительных успехов в исследовании эндшпиля, ясно, что это полумера, и есть прямой смысл вернуться к старому положению. Точнее говоря, кодекс должен содержать список всех «исключительных» видов позиций и предусматривать возможность его пополнения.

Конкурсные задания

В этом номере мы начинаем новый шахматный конкурс. Его победителям будут присвоены спортивные разряды, они будут также награждены шахматной литературой с автографом А. Карпова, дипломами и значками журнала «Квант».



1. Белые начинают и дают мат в 2 хода.



2. Белые начинают и дают мат в 3 хода.

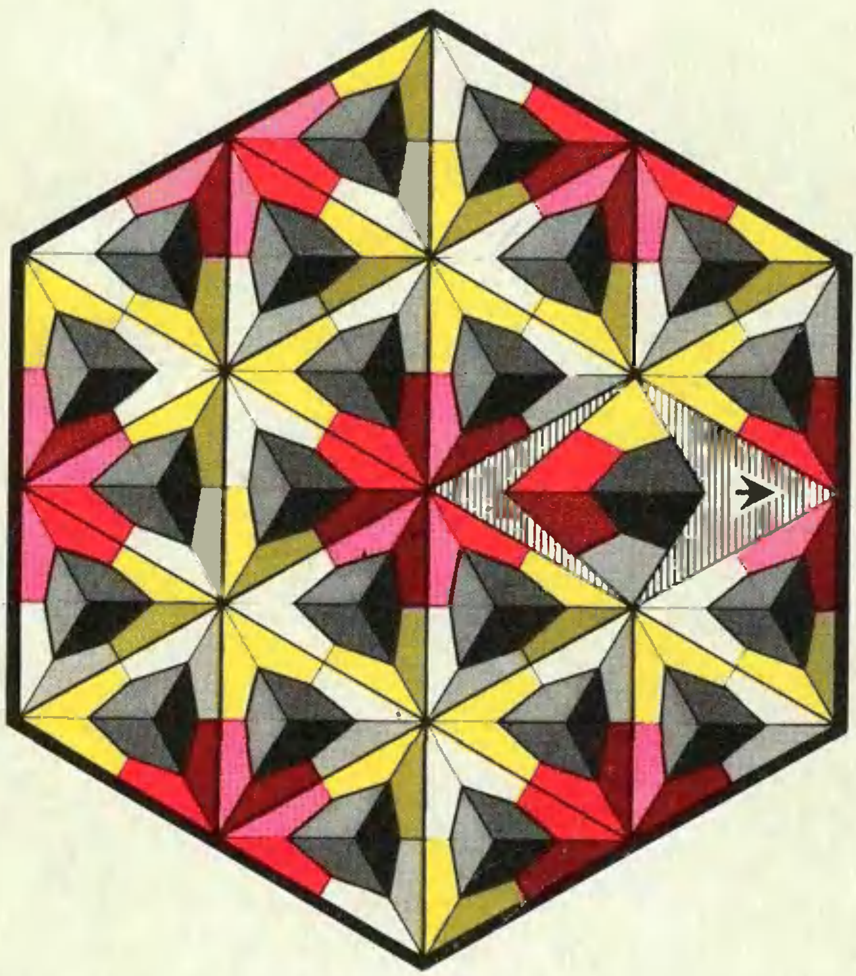
Срок отправки решений — 20 марта 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 1, 2».

Цена 40 коп.
Индекс 70465

В головоломке «Волшебные пирамидки» двадцать три правильных тетраэдра в первоначальном положении образуют красивый симметричный узор. По правилам игры нужно сначала произвольно изменить расположение тетраэдров, а затем постараться восстановить первоначальную картинку. Делать это можно только перекатывая тетраэдры из одной ячейки в соседнюю, пустую. Вынимать их из коробочки и менять местами нельзя.

Головоломка интересна и с математической точки зрения. Легко проверить, что тетраэдр с разноцветными гранями можно установить на одном и том же месте двенадцатью различными способами. Но можно ли получить все эти положения, если при установке не разрешается поднимать и вращать тетраэдр, а только перекатывать его через ребро различными маршрутами по плоскости так, чтобы он возвращался на исходное место? Подумайте — в этом ключ успеха в игре.

Другой интересной задачей является построение симметричных узоров, отличных от показанного на рисунке. Просим всех, кому удастся получить новые симметричные узоры, прислать их в редакцию.



Игрушку нетрудно сделать самим, склеив тетраэдры и коробочку из плотной бумаги или тонкого картона. Раскраска всех элементов одинакова. «Волшебные пирамидки» придумали А. Дремов и Г. Шевцова из Кривого Рога. Они стали победителями конкурса игр-головоломок газеты «Комсомольская правда».

А. Т. Калинин